ORD
Ct. Ct
12

TRATADO ELEMENTAR

DE

GEOMETRIA ANALYTICA A DUAS E A TRES DIMENSÕES

POR

A. COMTE

Traducção da Revista do Club Academico

DA

ESCOLA MILITAR

BIBLIOTECA
AGLIBERTO XAVIER

RIO DE JANEIRO

Typ. Litteraria, rua Sete de Setembro n. 131.

—

1881

ADVERTENCIA DO AUTOR

Não exige o conjuncto deste tratado outros conhecimentos prévios além dos que se podem adquirir facilmente n'um primeiro anno de estudos mathematicos convenientemente dirigidos, successivamente comprehendendo: 1° cerca de quinze lições sobre a arithmetica propriamente dita; 2° trinta lições sobre a parte verdadeiramente usual da algebra, composta do exame completo dos dous primeiros gráos, da formula do binomio, do calculo dos radicaes, da theoria das duas mais simples progressões, e da theoria dos logarithmos, completada pela resolução das equações exponenciaes correspondentes; 3° trinta lições sobre a geometria elementar, judiciosamente assistida do calculo algebrico nos casos que naturalmente o reclamam; 4° quinze lições sobra a trigonometria completa, sem exceptuar a resolução dos triangulos esphericos; 5° dez lições sobre os elementos da geometria descriptiva; 6° emfim, vinte lições sobre a statica elementar. Estas duas ultimas partes aqui são mesmo accessoriamente suppostas: uma, quer para certas formulas de linguagem que me pareceram adequadas para esclarecer o discurso, quer, sobretudo, pela aptidão que ella desenvolve em claramente especular no espaço; outra em referencia a algumas noções accessorias ainda menos indispensaveis. Uma muito activa pratica quotidiana do complexo do ensino mathematico, individual ou collectivo, continuada sem interrupção desde o anno de 1816, autorisa-me a pronunciar que semelhante preambulo é plenamente sufficiente para um estudo satisfactorio da geometria analytica, quando nesta nos limitamos ás theorias verdadeiramente accessiveis á analyse ordinaria. Cada anno novo de experiencia mais me confirma na convicção de [que ha a colher muito mais utilidade didactica de uma luminosa applicação deste estudo "geometrico ao da algebra superior, do que da reacção secundaria desta sobre certas partes da primeira, reacção

que deve aliás finalmente resultar de uma judiciosa revisão geral, da qual não poderia prescindir modo algum de ensino. Não sómente não teem, a meus olhos, as intelligencias ordinarias necessidade de uma mais extensa preparação do que a acima definida, afim de com proveito seguirem as lições dos professores que me outorgarem a honra de tomar por guia este tratado; mas eu ouso até assegurar que esta iniciação seria tambem sufficiente para os espiritos felizmente organisados que desejassem aqui estudar isoladamente a geometria analytica sem soccorro algum estranho.

Resulta esta obrinha de uma especie de mui passageiro lazer devido á intermittencia philosophica que naturalmente devia commigo ter lugar entre a recente terminação de meu systema fundamental de philosophia positiva e a proxima estréa dos grandes trabalhos cujas bases alli lancei. Todos os que sabem quão activamente occupei-me, durante um quarto de seculo, em regenerar o conjuncto do ensino mathematico, em espontanea connexidade com a elaboração geral a que consagrei minha vida, tinham-me ha muito tempo solicitado a pelo menos publicar a parte das minhas lições que se refere aos elementos da geometria analytica, como relativa ao mais importante, mais difficil e mais imperfeito grau de iniciação mathematica, em que se pode dizer, com effeito, sem exageração alguma, que, após dous seculos completos, a admiravel concepção de Descartes ainda não ha sufficientemente penetrado, pois que sempre parece essencialmente destinado ao estudo das secções conicas.

Por mais honroso, porem, que semelhante voto devesse parecer-me, as exigencias superiores de minha magna empreza philosophica haviam-me até agora interdicto a possibilidade de satisfazel-o. Acabo de aproveitar, para este fim, um primeiro intervallo disponivel, que talvez jámais se ha de reproduzir, para escrever este tratado elementar durante os tres mezes que annualmente occupa o meu curso oral de geometria analytica n'um dos principaes estabelecimentos destinados á preparação polytechnica, a instituição especial fundada em Paris por M. Laville.

Alem de inevitaveis communicações parciaes, espontaneas ou provocadas, que, ha varios annos, hão feito indirectamente penetrar, no ensino ordinario da geometria analytica, algumas das minhas innovações, e independentemente das indicações for-

maes que, a este respeito, contem o tomo primeiro da minha philosophia positiva, publicado em 1830, o plano e até o espirito do meu systema didactico hão sido directamente caracterisados, em 1836, por um programma especial do complexo de minhas lições annuaes, então lithographado para o uso quotidiano de meus alumnos, e cuja propagação exterior sempre facilitei.

A primeira metade deste programma naturalmente tornou-se, com alguns melhoramentos secundarios, a taboa razoada das materias deste tratado, em que póde aquella utilmente dirigir uma rapida revisão geral, visto como ahi se acha sufficientemente indicada a filiação de todas as idéas, assim como o objecto peculiar a cada um dos 168 paragraphos de que se compõe este volume.

Pensei que não seria inutil, mesmo para os que desconhecem o meu ensino oral, juntar a esta taboa a segunda metade de semelhante programma, relativa a lições que jámais talvez terei a faculdade de publicar. Esta indicação caracteristica póde sobretudo adquirir verdadeira importancia em relação ao ensino do calculo differencial, que certamente constitue, após a geometria analytica, a mais decisiva e até hoje a mais imperfeita parte da iniciação mathematica: o plano e o espirito das lições que fiz, sobre este assumpto, na escola polytechnica, em 1836, ficam deste modo sufficientemente apreciaveis. Póde-se, em uma palavra, considerar o conjuncto deste programma como dando justa idéa geral do destino proprio á uma das cento e vinte lições que faço annualmente, de 1 de Novembro a 1 de Maio, no estabelecimento acima designado.

A publicação actual ha de, espero, comportar uma certa efficacia individual, ou para offerecer uma direcção systematica á tendencia instinctiva de algumas juvenis intelligencias para sufficientemente desapegarem-se de uma desastrosa rotina escolastica, ou tambem para favorecer os esforços espontaneos de alguns judiciosos professores que sentem dignamente a necessidade de regenerar uma ordem de estudos em que, máo grado todos os seus inconvenientes naturaes e seus vicios accidentaes, é mister certamente ver, sob o duplo aspecto logico e scientifico, o primeiro grão indispensavel de toda e qualquer iniciação gradual á uma sã philosophia geral. Porém, com isto de acordo pouco mais ou menos, a minha apreciação aprofundada da nossa situação intel-

lectual não me permitte de maneira alguma pensar que esta tentativa parcial e isolada possa hoje bastar para neutralisar as deploraveis influencias didacticas inherentes á todo o nosso regimen scientifico, cujos perigos se acham naturalmente mais pronunciados em mathematica do que algures, em virtude da independencia mais completa que caracterisa estas especulações preliminares, nas quaes o empyrismo dispersivo e a aversão das vistas de conjuncto deviam, n'este seculo, mais especialmente prevalecer como heil-o plenamente estabelecido em minha grande obra. Por mais necessaria que portanto já se haja tornado, aos olhos de um grande numero de excellentes espiritos, em França sobretudo, a renovação radical desta phase inicial da educação positiva, que tão raro até aqui realisa a sua eminente aptidão logica, conheço melhor do que ninguem a intima solidariedade que d'ora avante semelhante regeneração liga a todas as outras necessidades essenciaes da razão humana, de modo a só poder ser sufficientemente realisada sob o ascendente ulterior de uma nova philosophia geral, da propria sciencia emfim emanada, conformemente ao fim invariavel de todos os meus trabalhos quaesquer. Assim é sómente que poderá gradualmente prevalecer o verdadeiro espirito de conjuncto, sem o qual ensino algum poderia ser convenientemente dirigido.

GEOMETRIA ANALYTICA A DUAS DIMENSÕES

PRIMEIRA PARTE

INTRODUCÇÃO GERAL

CAPITULO I

NOÇÕES FUNDAMENTAES

1—*A geometria analytica*, qual a fundou Descartes, é essencialmente destinada a generalisar o mais possivel as diversas theorias geometricas, conforme a intima subordinação das mesmas a concepções analyticas, submettendo as differentes questões a outros tantos methodos uniformes necessariamente applicaveis a todas as figuras convenientemente definidas; quer nos limitemos á geometria plana, que deve constituir o nosso primeiro e principal estudo, quer se considerem, como depois o faremos, superficies quaesquer. Para melhor apreciar este destino caracteristico, cumpre de antemão reconhecer que a maxima parte das investigações geometricas, e sobretudo as mais importantes, ainda que mórmente limitadas no começo a certas figuras, de igual modo convém por natureza a todas as fórmas imaginaveis de linha ou de superficie.

Tal é, por exemplo, a determinação das tangentes igualmente essencial a todas as curvas, pois serve de base á comparação daquellas com um systema conveniente de rectas. O mesmo se dá a respeito das questões directamente relativas á medida da extensão, as quaes constituem o objecto final das especulações geometricas: quer se trate de estimar o comprimento de uma curva, ou a área por esta limitada, ou o volume engendrado pela sua rotação, etc, não ha fórma que não deva dar logar a pesquizas analogas. As questões verdadeiramente limitadas a certas figuras, e que não comportam generalisação real, qnasi sempre offerecem interesse mui secundario, excepto se constituem, como muitas vezes acontece,

simples modificações particulares de uma consideração plenamente geral (*). Reconhecida ás claras esta generalidade espontanea das principaes indagações geometricas, deve naturalmente tornar desejavel equivalente generalidade nos methodos correspondentes. Ora, tal é sobretudo a immensa superioridade da geometria moderna, constituida no estado analytico pela concepção fundamental de Descartes. Com effeito, antes desta renovação decisiva, as questões geometricas apenas comportavam soluções especiaes em que o mesmo problema devia de novo ser resolvido em todos os casos conhecidos, sem que se pudesse de modo algum utilisar, por falta de uma directa e abstracta apreciação, o que lhes era necessariamente commum. Por exemplo, os meios que a geometria antiga empregava para tirar tangentes ás secções conicas de nada serviam, senão como exercicio logico, para facilitar essa indagação acerca da cissoide, da espiral, da cycloide, etc., cada qual, a esse respeito, exigio ulteriormente novos esforços sempre particulares, até que a analyse cartesiana tenha afinal elevado o systema das especulações geometricas ao nivel de seu verdadeiro estado philosophico, instituindo perduravel harmonia entre a extensão dos methodos e a das questões.

Tendo esta grande concepção até hoje penetrado mui pouco no ensino habitual, a geometria analytica é de ordinario apreciada como unicamente propria para apresentar sob nova fórma o estudo das secções conicas, cuja superioridade effectiva, si a tal caso nos deveramos limitar, seria por certo mui contestavel. Por mais viciosa que seja, porem, uma exposição, em que os methodos geometricos adherem de modo demasiado estreito aos casos particulares, que foram tidos exclusivamente em mira, não poderia ella alterar a inteira generalidade que caracterisa espontaneamente as theorias analyticas, a qual esforçar-me-hei por fazer directamente sobresahir neste logar, como constituindo seu principal valor, a um tempo scientifico e logico.

(*) Talvez, no estado hodierno da geometria, esta observação só encontre importante excepção a respeito da theoria dos fócos, unica que reconheceremos ser de facto limitada ás secções conicas, sem admittir, em relação a qualquer outra curva, equivalente algum effectivo. Porém, mesmo neste caso, posta á margem a especialidade natural de tal assumpto, sua extensão directa a tres curvas aliás mui distinctas, tanto mais apreciavel deve tornar uma conveniente generalidade de methodo, como si a linhas quaesquer esta indagação pudesse se estender.

Na antiga geometria jámais questão alguma podia ser na realidade esgotada, visto como ficava sempre por tratar uma infinidade de novos casos, ás vezes exigindo tão grandes esforços como para a instituição de uma nova ordem de pesquizas. Pelo contrario, a geometria cartesiana instituindo melhor economia de nossas forças especulativas, apenas considera como verdadeiramente importante a creação de novos methodos geraes, applicaveis a assumptos ainda intactos e cuja especialisação a certas formas só pode offerecer difficuldade secundaria.

2 — De accôrdo com tal apreciação, este systema final da sciencia geometrica deveria ser racionalmente designado pelo nome de geometria geral, como propul-o, ha muito tempo, no tomo I do meu *Systema de philosophia positiva*. Mas, em vista da alta importancia que sempre se deve ligar, sobretudo no ensino elementar, em conservar, o mais possivel, as expressões consagradas, a não ser que sejam radicalmente improprias, julgo dever empregar habitualmente a qualificação ordinaria de geometria *analytica*, afastando, todavia, com esmero o assás imperfeito e infelizmente ainda muito usado titulo de *applicação da algebra á geometria*.

Explicando convenientemente esta denominação de *analytica*, pode-se ver, com effeito, neste termo, o resumo do conjuncto dos attributos que caracterisam a nova geometria, embora tal designação se refira espontaneamente á natureza dos meios empregados sem assás recordar a apreciação do fim, que assim é apenas indicado de modo indirecto, conforme sua intima e necessaria harmonia com a marcha annunciada. A especie de equivoco que naturalmente se liga á palavra *analyse* e ás suas diversas derivadas, conforme a encaremos na sua especial accepção mathematica ou na sua universal significação logica, não poderia mesmo estorvar semelhante destino; pois é obvio reconhecer, em principio, como o desenvolvimento da sciencia cada vez mais nol-o fará sentir, que os methodos proprios á esta generalisação final das theorias geometricas devem ser eminentemente *analyticos*, segundo os dous sentidos desta palavra. Considerando em primeiro logar o sentido especial que estende-se ao complexo da mathematica abstracta, certo é que as theorias geometricas só pódem ser convenientemente generalisadas pelas concepções analyticas, visto como a parte abstracta de cada questão, é, no fundo, a unica susceptivel, por meio de uma judiciosa exclusão, de solução verdadeiramente uniforme, a unica commum á todas as figuras ima-

ginaveis. Quer se considere a determinação das tangentes ou a das quadraturas, etc., reconhece-se que, devendo os resultados necessariamente differir nas diversas curvas, a analyse é o unico methodo que poderia sufficientemente separar e convenientemente tratar o que o assumpto offerece de essencialmente uniforme no meio de uma inevitavel diversidade. Esta natural aptidão das concepções analyticas pode mesmo estender-se, até indicar preciosas approximações entre questões geraes verdadeiramente distinctas, o que constitue, com certeza, a mais alta generalisação possivel, que não pode ser permittida por outra marcha qualquer. Por exemplo, os geometras descobriram, desde a origem da geometria analytica, como explical-o-hei em logar competente, a identidade fundamental das diversas indagações relativas á medida da extensão, e que podem umas nas outras d'ora avante transformar-se, quer se trate de rectificações, quer de quadraturas, ou mesmo de cubaturas. E' só segundo uma commum apreciação analytica, que podiam ser facilmente aprehendidas relações tão notaveis, mui proprias ao mutuo aperfeiçoamento destes differentes estudos. Sob este ponto de vista fundamental, a geometria geral é, pois, com justa razão qualificada de analytica.

Segundo, porém, uma tendencia vulgarissima, não é licito que este uso plenamente legitimo conduza, tomando a forma pelo fundo, a encorporar viciosamente na geometria analytica especulações que não poderiam pertencer-lhe, porque não offerecem a generalidade, que é a sua caracteristica essencial, por mais extenso e mesmo indispensavel que aliás possa ser o emprego do calculo algebrico em taes casos. Assim é que não poucos geometras debalde contestaram a Descartes a originalidade de sua grande renovação, sob pretexto de que muito tempo antes delle a algebra tinha já fornecido certas soluções geometricas. Vê-se tambem, segundo o mesmo engano, annexar as mais das vezes ainda á geometria analytica a simples trigonometria, sem embargo do judicioso exemplo de Legendre, que, seguindo uma irrecusavel indicação historica, a tinha collocado em seguida á geometria elementar, da qual constitue evidentemente o inseparavel complemento, por ser igualmente relativa a um problema puramente especial, ainda que de capital importancia. Semelhante confusão, que parece dogmaticamente consagrada ainda de accôrdo com uma viciosa divisão escolastica entre os problemas determinados e os indeterminados (como si todas as questões geometricas não fossem, cada qual em seu genero necessariamente determinadas, ou se procure um ponto, uma linha ou mesmo uma superficie) oppõe-se radicalmente a toda a sã apre-

ciação do verdadeiro espirito da geometria analytica. Seria mesmo impossivel, dest'arte, distinguil-a da antiga geo metria, onde tambem se emprega, quasi desde os primeiros passos, o calculo algebrico, posto que seu officio, no caso vertente, seja ordinariamente menos extenso e sobretudo applicado sob formas muito menos convenientes, por meio da theoria das proporções, a qual constitue, como processo logico, o imperfeitissimo equivalente da nossa algebra actual. Havemos de reconhecer a miudo, ao inverso desta grosseira opinião, que theorias geometricas podem ser eminentemente analyticas, apezar da rarissima intervenção do calculo, ao passo que outras especulações em que elle tem grande parte, de modo algum merecem semelhante qualificação.

Si agora passarmos á segunda accepção scientifica da palavra *analyse* e suas derivadas, conforme o uso universal e a explicação etymologica, uma apreciação assás desconhecida pode fazer sentir facilmente que, por este novo predicado, a geometria geral deve ser eminentemente analytica, isto é, proceder por decomposição. Com effeito, as questões sendo quasi sempre compostas de numero minimo de elementos uniformes, cujas diversas combinações effectivas são, pelo contrario, em extremo multiplicadas, a generalidade das soluções só pode ser obtida pela separação abstracta das differentes condições elementares, unicas susceptiveis de serem tratadas, cada uma de per si, sob um ponto de vista geral. Pelo contrario, o espirito da geometria antiga era essencialmente synthetico, e especial portanto, pois que as diversas condições de cada problema eram sobretudo consideradas no seu complexo, apezar do uso accessorio do que se tinha denominado a *analyse geometrica*, a qual, todavia, historicamente deve ser considerada um primeiro encaminhamento logico para o systema moderno, ainda que a ausencia das concepções algebricas, unicas que permittem fixar semelhante separação e ao cabo levar-lhes as consequencias, devessem privar esta marcha de sua principal efficacia, mais preconisada do que posta em pratica entre os geometras gregos.

Esta dupla apreciação faz sentir que o novo methodo geometrico, instituido por Descartes, tem por caracter essencial, isolando cada condição de um problema, submettel-o a uma solução plenamente geral, por uma conveniente reducção do concreto ao abstracto. A qualificação de *analytica* têm sobretudo o merito de recordar aos que della formam idéa exacta esse espirito fundamental

que cuidadosamente farei sobresahir sempre que se offerecer occasião opportuna.

3— Segundo as indicações precedentes, a revolução radical operada no systema dos estudos geometricos pela geometria analytica, deve ser considerada como a época mais decisiva para o desenvolvimento total dessa sciencia, cuja constituição philosophica era até essa data tão insufficiente e tão precaria, apezar de admiraveis descobertas especiaes. Mas, além disso, mesmo neste ponto, mister se faz reconhecer o mais decisivo passo que jámais pôde fazer o complexo das especulações mathematicas, tanto abstractas como concretas. De facto, segundo uma reacção necessaria, esse confronto fundamental entre as noções geometricas e as concepções algebricas, comquanto a principio apenas constituido para aperfeiçoar a geometria, que fez assim, em dous seculos, mais progressos reaes do que na longa série de todos os anteriores, foi quiçá mais favoravel ao aperfeiçoamento da analyse mathematica, cujas creações mais poderosas são, com effeito, devidas á esta feliz influencia logica. Não só as indicações analyticas assim acharam espontaneamente uma fonte inesgotavel e um interessante destino, sem os quaes a natural repugnancia do espirito humano para as abstracções demasiado indeterminadas teriam tornado o progresso dellas extremamente lento e quasi esteril, senão tambem, segundo uma influencia mais especial e mais profunda, a intervenção das considerações geometricas nas especulacões analyticas tem muitas vezes suggerido directamente felizes inspirações fundamentaes, como bem alto demonstra hoje o complexo dos s ãos estudos mathematicos. Essa reacção scientifica é essencialmente peculiar á geometria, que, por essa razão, nunca deixará de constituir a parte principal da sciencia mathematica. A mecanica racional, embora tão eminentemente analytica como a geometria, é de mui complexa natureza para comportar semelhante influencia. Verdade é que ella forneceu novo campo e novo destino á analyse, mas não novas luzes. Ainda que possam as equações abstractas ser concebidas, como representadas tanto por movimentos como por figuras, esta penosissima interpretação não poderia tornar-se a fonte de uma verdadeira indicação analytica.

Conforme á necessaria semelhança que, para o espirito humano, deve evidentemente existir em todos os generos, entre a marcha essencial da educação individual e a da evolução collectiva, deve tambem o estudo da geometria analytica, como é natural, constituir

a mais decisiva e portanto a mais difficil phase de toda a iniciação mathematica. As noções elementares da geometria e as rudimentares concepções da algebra, que até então pareceram completamente independentes umas das outras e mesmo radicalmente heterogeneas, apezar de algumas relações especiaes, contrahem, desde esse momento, uma intima e indissoluvel alliança, primeira base de commum extensão a ambas, e a qual tende cada vez mais a fazer conceber o complexo, de outra sorte incoherente, das especulações mathematicas como susceptivel de verdadeira unidade. Parte alguma do ensino mathematico deve, pois, tanto merecer a racional solicitude dos professores e a activa attenção dos discipulos.

4 —Para proceder convenientemente á exposição directa da concepção fundamental, segundo a qual Descartes constituiu a geometria analytica, é mister explicar primeiro um methodo preliminar, em que este grande philosopho só houve de systematisar as inspirações espontaneas da razão commum, e sem a qual a radical transformação das considerações geometricas em considerações analyticas houvera sido impossivel.

A analyse mathematica só pode especular sobre idéas de grandeza; ha entretanto na geometria duas outras categorias logicas, não menos naturaes que a primeira, uma, relativa á forma, outra á posição: é pois indispensavel préviamente, em geometria analytica, reduzir os pensamentos de forma e de situação á simples noções de grandeza, unicas immediatamente susceptiveis de se tornarem numericas. Ora, a solução geral desta difficuldade preliminar exige que a reduzamos o mais possivel, apenas nos occupando das idéas de situação, nas quaes pode-se fazer entrar as idéas de forma, visto como a forma de um corpo qualquer, podendo resultar constantemente da mutua disposição de suas partes, necessariamente será definida pela situação de todos os seus pontos. Assim é que, em nosso systema de geometria analytica, a posição é a unica formulada immediatamente pelas nossas equações, de onde pode depois resultar indirectamente a forma por meio de combinações convenientes. Tal marcha deve sem duvida offerecer, como breve havemol-o reconhecer, alguns verdadeiros inconvenientes, visto que a forma de um objecto é, em si, independente de sua situação; mas este modo de proceder não é menos inevitavel em geometria analytica, sob a indispensavel reserva dos meios geraes destinados a permittir, segundo nossas ulteriores explicações, o desprendimento das diversas

indicações relativas á forma das circumstancias estranhas proprias sómente á situação.

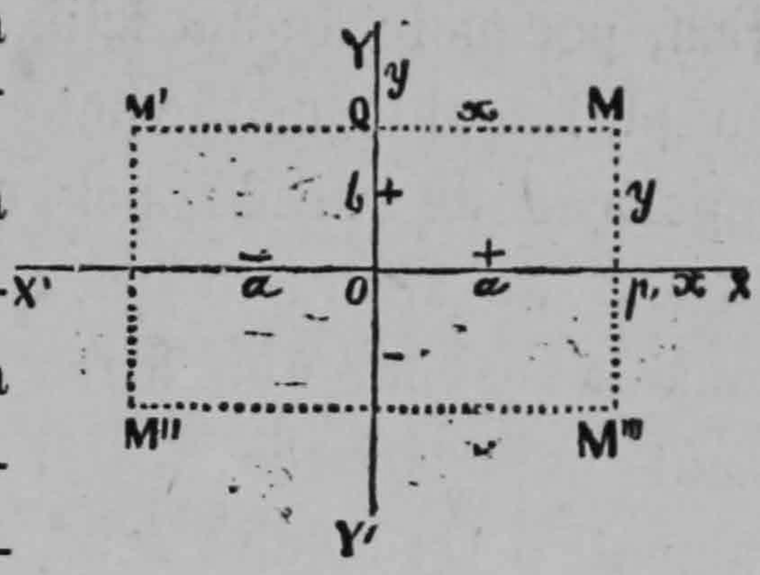
Todas as idéas elementares de situação, sendo naturalmente reductiveis á simples posição de um ponto, basta explicar, a esse respeito, como este ultimo caso pode ser reduzido a puras considerações de grandeza, o que se consegue de modos diversos pelo emprego do que chamamos systemas de *coordenadas*, isto é, com o auxilio de duas grandezas geometricas lineares, angulares, etc., que sobre um plano determinam, por sua combinação, o ponto correspondente relativamente a certos pontos de referencia fixos e communs.

Afim de melhor apreciar este indispensavel artificio elementar, cumpre attender á simples generalisação philosophica do processo espontaneamente suggerido a todo o espirito criterioso pela necessidade de definir a situação de um ponto sem poder mostral-o, necessidade que acarreta sempre o inevitavel emprego dos dados numericos. Si o ponto proposto deve pertencer a uma linha de antemão conhecida das duas intelligencias entre as quaes opera-se communicação tal, um unico destes dados basta para preencher essa indicação, assignalando por exemplo a maior ou menor distancia do ponto variavel a um ponto fixo da mesma linha. E' este necessariamente o mais simples caso de todos os que pode offerecer a reducção das idéas de posição ás idéas de grandeza: mas importa concebel-o distinctamente, porquanto é a base de todos os outros mais complicados. Quando o ponto procurado deve sómente fazer parte de uma dada superficie, o que sempre tem logar em geometria plana, torna-se então indispensavel a combinação de dous dados desse genero, um para indicar a linha que deve contel-o e o outro para distinguil-o do restante de sua circumferencia: a denominação de *coordenadas* lembra com felicidade a isolada insufficiencia de cada um dos dous elementos de determinação, que, só pelo concurso de ambos, se tornam efficazes. Afinal, no caso mais extenso e mais difficil, quando o ponto pode indifferentemente pertencer a todas as regiões do espaço, sua situação não pode dest'arte ser caracterisada senão combinando tres dessas condições de grandeza, como havemol-o especialmente reconhecer em geometria a tres dimensões.

Os pares de coordenadas, para este effeito empregados na geometria plana, podem ser tirados de uma multidão de construcções differentes, das quaes convem estabelecer as principaes neste logar.

Aquella que, sem ser sob diversos aspectos a mais natural de todas, merece verdadeiramente, a todos os respeitos, a preferencia universal que desde a origem da geometria analytica empyricamente obteve, consiste em determinar a posição de um ponto por suas distancias a duas rectas fixas, de ordinario rectangulares.

Si o ponto M (fig. 1) deve estar sobre um plano, a distancias dadas a e b dos eixos OX, OY, estará evidentemente collocado no unico encontro das duas parallelas traçadas a esses eixos por essas respectivas distancias, cada uma das quaes contel-o-hia indifferentemente, conforme a consideração isolada da condição correspondente. Uma dessas *coordenadas*, MP, que podemos utilmente suppor vertical, tem usualmente o nome de *ordenada*, emquanto que a outra, MQ, que então figurariamos horizontal, é commummente qualificada de *abcissa*, sem que esta diversidade seja aliás motivada entre elementos homogeneos. O meio de bem facilitar a comparação destas distancias variaveis, segundo as diversas posições do ponto, consiste em contar cada uma em OQ ou OP, segundo o eixo correspondente, partindo sempre da intersecção fixa O, justamente denominada *origem* commum das coordenadas. Emfim, quanto ao discurso algebrico, um uso muito conveniente faz constantemente designar cada uma dellas pela lettra minuscula analoga á maiuscula que indica a extremidade do eixo, o qual reciprocamente toma muitas vezes por esse motivo o nome familiar de eixos dos x ou dos y, conforme a coordenada variavel que ao mesmo se refere. Si, como ás vezes acontece, as duas rectas fixas não fossem rectangulares, as duas distancias seriam sempre medidas para cada eixo, parallelamente ao outro, e portanto, sob uma obliquidade igual á sua mutua inclinação, sem que a operação soffresse nenhuma outra modificação.



(Fig. 1)

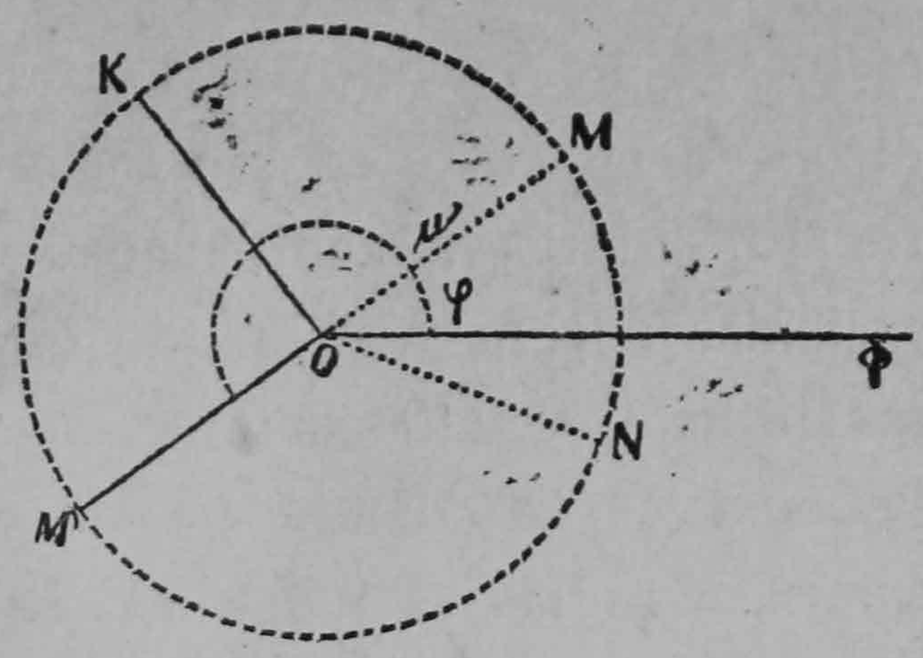
Realmente, conforme este primeiro systema de coordenadas, as idéas de grandeza parecem, á primeira vista, não serem sufficientes para substituir as idéas de situação. De facto, si o ponto proposto pode achar-se, como acontece de ordinario, collocado indifferentemente sobre o plano, nas quatro regiões separadas pelos dous eixos, com as mesmas coordenadas poderá com certeza occupar além da primitiva posição M as tres outras posições symetricas M', M'', M''',

que nada parece poder tornar numericamente distinctas. Porem, como uma ou outra destas coordenadas acha-se então contada sobre o respectivo eixo ao inverso do sentido primordial, esta prévia difficuldade, que teria radicalmente estorvado o desenvolvimento da geometria analytica, obrigando, para evitar inextricavel confusão, a renunciar o mais favoravel systema, foi completamente sobrepujada pelo incomparavel fundador da nova constituição geometrica, por meio de um feliz emprego geral de sua grande descoberta em philosophia mathematica, sobre a representação espontanea da opposição de sentido, pela opposição dos signaes + e — em toda a relação do abstracto para o concreto, para cada grandeza que, contada segundo uma direcção fixa, comporta uma inversão claramente caracterisada. Terei mais abaixo occasião de indicar expressamente o verdadeiro sentido desta noção fundamental, quasi sempre ensinada de modo vicioso. Limitando-nos a applical-a convenientemente, ella logo faz desapparecer a nossa elementar ambiguidade: comtanto que se tenha em vista o signal + ou — de cada coordenada, assim como o valor desta, nunca haverá a menor incerteza sobre a região correspondente ao ponto proposto, porque essa região desde então ficará distincta das outras tres por uma combinação apropriada dos dous signaes simultaneos.

O unico systema de coordenadas, que ás vezes é usado em geometria analytica, em falta do precedente, é talvez, ainda que muito menos conveniente que este, o mais natural de todos, porque offerece a mais simples combinação das duas idéas primordiaes de comprimento e de direcção. E' o systema habitualmente qualificado de *polar*, em contraposição ao primeiro, commummente chamado *rectilineo*, especificando dest'arte duas denominações em si demasiado vagas. Consiste elle em determinar a posição de um ponto sobre um plano pela sua distancia a um ponto fixo e pelo angulo que essa distancia forma com uma recta fixa: a coordenada linear tem ordinariamente o nome de *raio vector* segundo o uso astronomico; a coordenada angular não tem nome especial.

Tirado da geometria celeste, este systema emana primitivamente de uma tendencia universal para comparar espontaneamente, nas mais simples considerações geographicas, os diversos logares terrestres, pela combinação das suas distancias com as respectivas direções.

Um ponto *M* (fig. 2) é determinado pela intersecção de um circulo variavel tendo para centro fixo o *polo O*, e de uma recta movel em torno deste *polo*: as coordenadas correspondentes, que habitualmente chamaremos *u* e φ, determinam, para cada posição, uma —o raio deste circulo, outra—a inclinação desta recta sobre o eixo *O* Φ. Deve-se notar que a grandeza das duas coordenadas simplesmente é bastante para a inteira determinação do ponto, sem que seja mister attribuir-lhe qualquer signal mesmo para destinguir sufficientemente a posição *M* da oppost[a] *M'* em que o angulo φ, sempre contado no mesmo sentido, como em trigonometria mudou por certo de valor por um accrescimo de 180°. Mas em breve reconheceremos que, longe de constituir um motivo de preferencia, esta propriedade do systema polar torna-o, pelo contrario, mui desfavoravel ao seu destino analytico.



(Fig. 2)

Além destes dous systemas, os unicos usados, ha evidentemente uma infinidade de outros, mas cujo officio é puramente provisorio ou accidental. A sua consideração só tem importancia logica no intuito de evitar a excessiva restricção desta primeira noção fundamental, segundo a tendencia escolastica. Assim é que, por exemplo, ficaria determinada a posição de um ponto sobre um plano por meio de suas distancias a dous pontos fixos, pela intersecção de dous circulos de centros fixos, cujos raios variaveis constituiriam as coordenadas correspondentes. Poder-se-hia igualmente empregar as direcções combinadas das rectas que, partindo de dous pontos fixos terminassem no ponto procurado, resultante neste caso de uma intersecção rectilinea, por meio de duas coordenadas angulares, medindo os angulos de cada uma destas linhas moveis com o eixo que une os dous polos. Em summa, não existe construcção plana alguma que, convinientemente considerada, não possa dar logar a um systema qualquer de coordenadas e muitas vezes a diversos, apreciando os differentes elementos lineares, angulares ou mesmo superficiaes, os quaes podem ser ligados pela indicada construcção á posição de um ponto, e cuja combinação binaria, seja qual fôr, seria reciprocamente susceptivel de determinal-o.

N'um systema qualquer, o ponto movel é sempre necessariamente collocado no encontro de duas linhas, rectas ou curvas, cujas condições determinantes são todas fixas, excepto uma unica, que, variando, indica a coordenada correspondente. Assim, os diversos systemas devem a principio ser entre si distinguidos pela natureza das linhas por elles empregadas. Esta apreciação, porem, não seria sufficiente, visto como podem ás vezes systemas muito differentes empregar linhas semelhantes : haveria, por exemplo, uma infinidade de systemas merecendo o nome de *rectilineos*, si tal nome fosse dado a todos aquelles em que um ponto resulta da intersecção de duas rectas, como o indica entre outros, além do systema rectilineo ordinario, descripto em primeiro logar, o systema duplamente angular, que rematou a nossa enumeração summaria. Deve-se, pois, além disso, attender cuidadosamente ao modo de variação de cada uma das duas linhas elementares e apenas considerar como verdadeiramente identicos os systemas coordenados que, empregando as mesmas linhas, fazem-nas variar, segundo a mesma lei, de modo que todas as condições fixas de determinação sejam exactamente communs aos dous casos comparados.

5.—Este indispensavel preambulo, sem o qual as idéas geometricas não poderiam tornar-se reductiveis a idéas numericas, permitte-nos proceder agora á exposição directa da concepção fundamental, de acôrdo com a qual Descartes constituio a geometria analytica, estabelecendo uma intima harmonia mutua entre as linhas e as equações.

Quando um ponto se desloca arbitrariamente sobre um plano, variam suas duas coordenadas independentemente uma da outra. Si, porem, em seu movimento, o ponto segue um trajecto rigorosamente determinado, aliás de fórma qualquer, estas duas variaveis não poderiam mais ser tidas como independentes. Basta, com effeito, uma dellas para então determinar o ponto em relação ao qual a linha proposta occupa o logar da que corresponderia á outra coordenada. Em tal caso só pode esta receber valores subordinados ao da primeira, da qual assim se torna analyticamente, segundo a linguagem dos geometras, uma verdadeira *funcção*, aliás assignalavel ou não, caracterisada por uma conveniente *equação* entre essas duas variaveis. Ora, como esta equação traduz exactamente a condição de um tal trajecto, é justamente chamada *equação da linha* correspondente, visto constituir uma rigorosa definição analytica que a nenhuma outra figura pode convir, na qual, devendo

mesmo valor da *abscissa* produzir um valor differente para a ordenada tambem deve necessariamente mudar a relação existente entre os dous valores. A certos respeitos,é mesmo demasiado intima esta inevitavel correspondencia entre a linha e a equação, por isso que é affectada tanto pela situação como pela forma; pois que, segundo este principio, deve a equação experimentar uma mudança qualquer, quando a linha não faz mais que deslocar-se sem mudar de forma nem de grandeza; d'onde resulta a necessidade de regras analyticas expressamente destinadas a dissipar uma tal confusão, que aliás é uma consequencia necessaria de serem as idéas de posição as unicas immediatamente susceptiveis de expressão algebrica. Assim, a equação de uma linha em qualquer systema não é mais do que a relação constante que necessariamente existe entre as coordenadas variaveis do ponto descrevente, por isso que a linha é rigorosamente definida por uma propriedade commum a todos os seus pontos.

O principio geral de semelhante correspondencia só poderia ser convenientemente apreciado si considerassemos as idéas de equação ou de funcção do modo mais extenso e si cuidadosamente evitassemos confundir a concepção, sempre possivel, de cada equação com a sua formação effectiva, muitas vezes difficilima e não raras inaccessivel. Existe, sob este ultimo aspecto, maxima differença entre as diversas definições de que é susceptivel uma mesma linha. Por exemplo, a definição elementar do circulo, como logar dos pontos equidistantes de um ponto fixo, traduz-se logo, segundo o simples theorema de Pithagoras, na equação $y^2+x^2=r^2$, entre as coordenadas rectilineas de um qualquer de seus pontos, relativamente a dous eixos rectangulares tirados pelo centro do circulo indicado. Pelo contrario, a definição transcendente desta mesma curva, como sendo a que, sob o mesmo contorno, encerra a maior área, exige a intervenção da mais alta analyse, afim de obter-se a equação. O complexo da geometria hoje mesmo apresenta muitos exemplos de curvas cuja equação propriamente dita ainda não pôde ser formada e a respeito das quaes pode-se assegurar mesmo que essa formação exigiria necessariamente a introducção de novas funcções analyticas.

Cumpre notar desde já que esta correspondencia fundamental entre as linhas e as equações não poderia, por sua natureza, offerecer caracter algum absoluto que affectasse exclusivamente, em todos os casos, certas relações analyticas a certas formas geometricas. De facto, tal harmonia é evidentemente subordinada ao systema de

coordenadas escolhido. Si, pois, um hahito inveterado conduz, por exemplo, a ligar intimamente entre si as idéas de linha recta e de equação do 1º grau, ou de secção conica e de equação do 2º grau, emana isso unicamente do emprego demasiado exclusivo do systema rectilineo ao qual estas ligações se referem. Em outros systemas essas mesmas linhas affectariam evidentemente novas equações, cuja composição analytica muitas vezes pareceria desprovida de qualquer analogia com as primeiras, comquanto devesse existir entre ellas, apezar de todas as variaçòes possiveis, uma certa affinidade algebrica mais ou menos difficil de discernir, de acordo com sua commum origem geometrica.

Emfim, devemos assignalar aqui com todo o cuidado, em principio, como propriedade essencial desta correspondencia da equação com a linha, para cada systema de coordenadas, sua independencia necessaria da diversidade das definições propria a uma mesma figura. Ainda que a equação resulte inevitavelmente da definição, não é, entretanto, susceptivel de variar com ella, si a linha não experimentar mudança real; pois que as mesmas asbcissas sempre devem corresponder ás mesmas ordenadas, emquanto a successão dos pontos não tiver effectivamente variado, qualquer que seja o novo aspecto sob o qual possamol-a considerar. Nada mais proprio do que esse notavel privilegio para dignamente fazer sobresahir o quanto a equação caracterisa profundamente a verdadeira natureza invariavel da linha correspondente, no meio da variedade quasi indefinida de seus attributos geometricos. Ao mesmo tempo, essa necessaria identidade de equação, provenha esta de qualquer definição, deve apresentar, em geometria analytica, um importante destino habitual, permittindo reconhecer assim, de modo seguro e uniforme a equivalencia effectiva das definições que houverem conduzido á mesma equação e que, sem este feliz intermediario, teriam muitas vezes offerecido numerosos obstaculos a uma approximação decisiva.

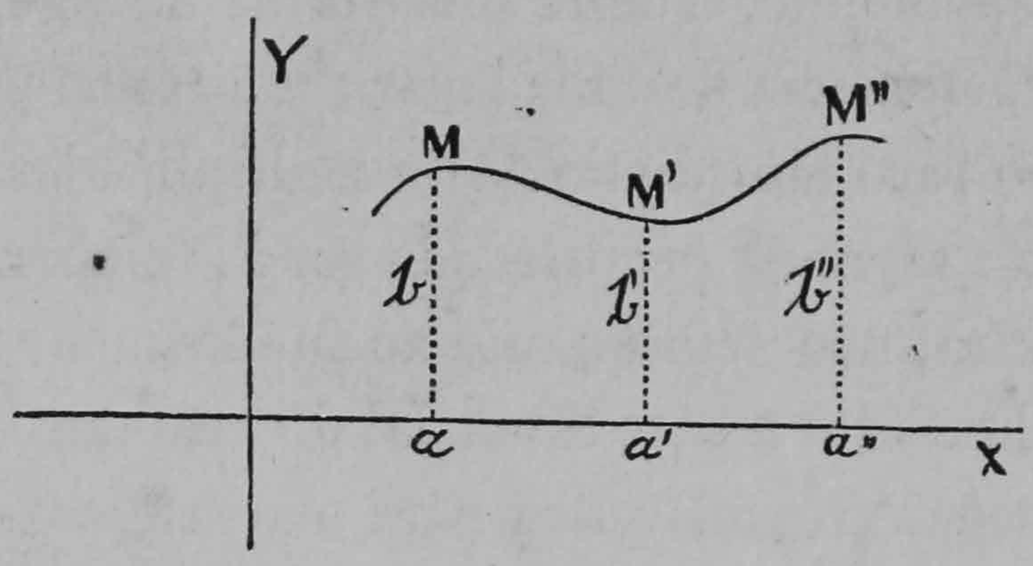
6.—Tendo assim caracterisado directamente a concepção fundamental da geometria analytica, convem agora, para della fazermos nma justa idéa geral, aprecial-a em sentido inverso, quanto á representação das equaçòes a duas variaveis pelas linhas planas correspondentes.

Esta pintura das equações resulta da construcção facultativa de cada uma de suas soluçòes. Considere-se em uma equação

qualquer, resolvida ou não $y=\varphi(x)$ ou $f\ (x, y) = 0$, cada par capaz de satisfazel-a,

$$\left\{\begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} x=a' \\ y=b' \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} x=a'' \\ y=b'' \end{matrix}\right\} \text{etc.}$$

como exprimindo as coordenadas de um ponto em um systema qualquer, por exemplo, no rectilineo. Desde então poderão estas diversas soluções ser geometricamente representadas por outros tantos pontos M, M', M'', etc (fig. 3) cuja successão ficaria arbitraria si esses pares de valores não tivessem caracter algum commum, mas que, pelo contrario, formarão uma linha nitidamente determinada, em virtude de sua uniforme propriedade de convirem á uma mesma equação, que constituirá espontaneamente a definição algebrica dessa linha, de modo a distinguil-a rigorosamente de outra qualquer. Considerada quanto à equação de que provém, semelhante linha constituirá o que se chama *lugar geometrico*, cujo estudo ulterior ha de necessariamente fazer descobrir outras proprieda-



(Fig. 3)

des especiaes, susceptiveis de lhe fornecerem diversos modos de geração mais ou menos afastados dessa origem analytica. A mór parte das curvas hoje consideradas não tem com effeito, outra origem; por isso são habitualmente denominadas por suas proprias equações, salvo o pequeno numero das que diversos motivos conduziram a designar sob denominações particulares. Concebe-se, effectivamente, com que extrema facilidade pode-se desde então imaginar uma infinidade de novas curvas sujeitas a definições rigorosas, ao passo que o antigo regimen geometrico só comportava, a este respeito, limitadissimos recursos, mesmo para á imaginação mais fecunda.

Sob este segundo aspecto geral, ainda mais evidentemente do que sob o primeiro, a correspondencia fundamental das linhas com as equações é necessariamente relativa à natureza do systema de coordenadas adoptado. Da mesma equação poder-se-hia certamente tirar uma infinidade de linhas differentes, limitando-nos a mudar convenientemente esse systema. Assim, por exemplo, a equação $y=ax$, que em coordenadas rectilineas representa um

linha recta, produziria, pelo contrario, em coordenadas polares, uma espiral composta de uma infinidade de circumvoluções crescentes, o que o leitor pode verificar facilmente. Todavia, por mais variadas que possam ser taes pinturas, é preciso, sem duvida, que estas diversas figuras conservem entre si uma certa analogia intima até aqui pouco apreciada segundo sua commum origem algebrica. Quanto á independencia acima assignalada de cada equação relativamente á diversidade das definições proprias á linha correspondente, é aqui substituida de algum modo, pela equivalente independencia de cada lugar geometrico para com as differentes formas, não raro mui distinctas e multiplicadas, que a sua equação comporta. Esta segunda propriedade geral, embora menos sentida que a primeira, não tem quanto ao fundo menos importancia. Torna-se ella, sobretudo, a base essencial do alto destino logico de que é susceptivel a geometria analytica para o aperfeiçoamento das especulações algebricas. A curva de uma equação apresenta, com effeito, a inestimavel vantagem de constituir espontaneamente um resumo mui expressivo do conjuncto das comparações a que possa dar lugar a marcha geral das soluções desta equação. Ora, esta marcha, que caracterisa essencialmente a equação, correspondentes no meio das innumeras transformações de que é susceptivel, não poderia ser indicada por nenhum signal analytico, e ficaria mesmo, sem esta luminosa pintura, profundamente dissimulada sob os pormenores algebricos indicados directamente pela composição da equação. Tal é a fonte elementar das indicações fundamentaes, em virtude das quaes, ha dous seculos tanto concorreu o feliz emprego das considerações geometricas para o aperfeiçoamento das concepções analyticas.

7--.Esta dupla explicação geral da intima harmonia natural que a grande concepção de Descartes organisou definitivamente entre as idéas de linha e as de equação caracterisa já o verdadeiro espirito e a principal difficuldade da geometria analytica. Todas as linhas que podem ser o assumpto das indagações da geometria plana, sendo assim representadas n'um systema conveniente por outras tantas equações, cada phenomeno geometrico que a ellas se refira torna-se desde logo susceptivel de expressão analytica, quer seja concernente ás circumstancias isoladas de cada uma das linhas propostas, quer ás suas relações mutuas. Sob este primeiro aspecto, trata-se sobretudo, em geometria analytica, de descobrir o equivalente analytico de cada consideração geometrica. Reciprocamente, toda equação abstracta a duas va-

riaveis, pelo menos, sendo do mesmo modo representada por uma curva correspondente, não ha modificação algebrica que não deva comportar uma certa interpretação geometrica, cuja descoberta constituirá habitualmente, sob este segundo aspecto, a difficuldade essencial da geometria analytica. Vê-se, pois, que todos os esforços devem principalmente consistir em desenvolver e aperfeiçoar de continuo esta dupla relação alternativa entre o abstracto e o concreto, cujo principio fundamental é constituido pelo pensamento cartesiano.

8.—Quaesquer que sejam as eminentes vantagens, a um tempo logicas e scientificas, proprias a esta admiravel concepção cujo poder e fecundidade cada vez mais este tratado porá em relevo, importa agora, afim de esboçar plenamente sua apreciação geral, assignalar de modo summario as suas imperfeições essenciaes, sem porem nos occuparmos de remedial-as, evitando todavia consideral-as como necessariamente irreparaveis.

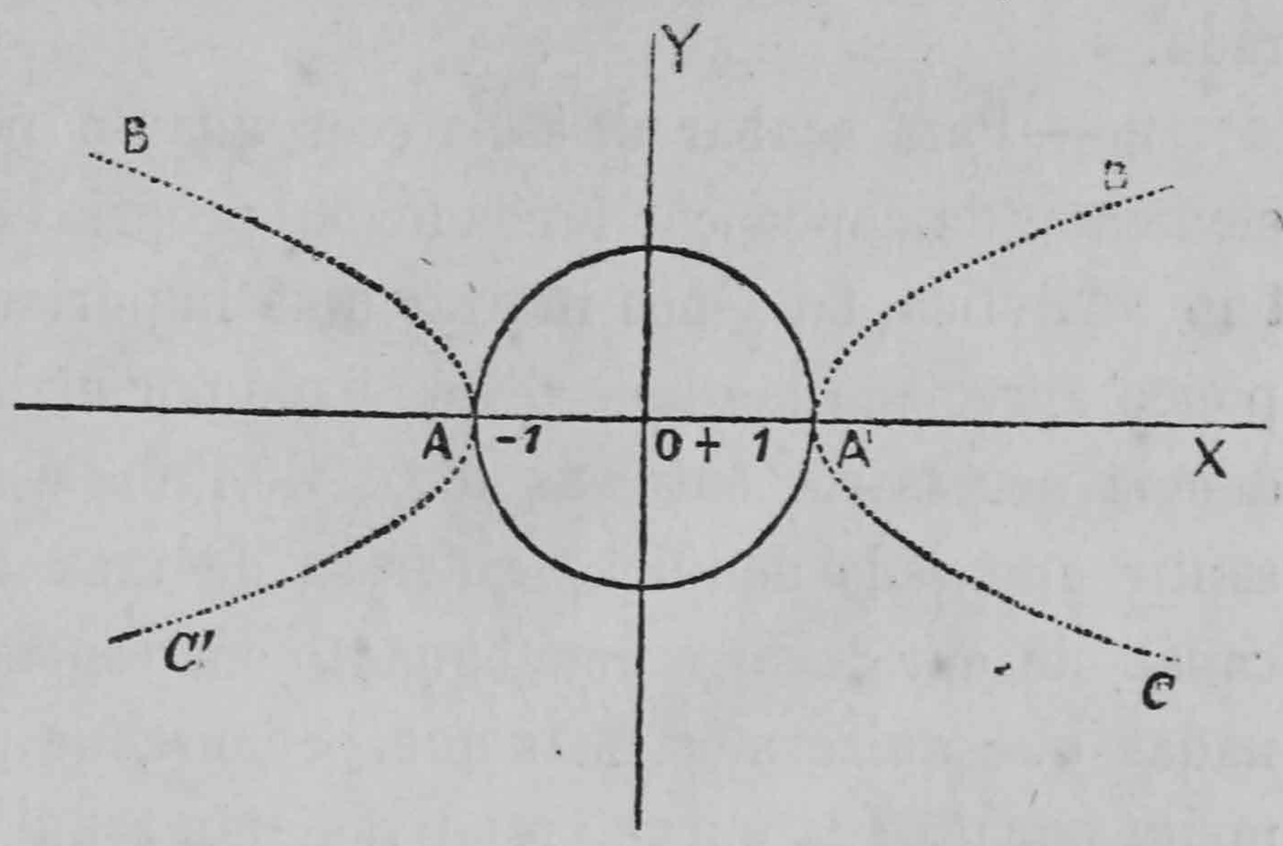
Sob o primeiro dos dous aspectos fundamentaes acima explicados, a representação analytica das linhas é actualmente imperfeita, porque a equação, excedendo algumas vezes a estricta definição, convém a todo o conjuncto de cada linha, mesmo quando a geração proposta é restricta a uma porção determinada. Por exemplo, procurando a equação rectilinea ou polar do lugar do vertice de um angulo invariavel cada lado do qual passa por um ponto fixo, achar-se-ha que ella convém viciosamente á totalidade do circulo correspondente, ainda que a definição só convenha a um arco limitado, que poderá mesmo ser muito pequeno si o angulo for muito obtuso. A mór parte das soluções da equação não se refeririam neste caso ao angulo proposto, mas ao seu supplemento. Igualmente, para citar um caso ainda mais sensivel, considerando o lugar do vertice de um triangulo rectangulo, cuja hypothenusa escorrega entre dous eixos rectangulares a equação indicará duas rectas indefinidamente prolongadas, ao passo que esta geração só poderia evidentemente applicar-se á uma porção determinada de cada uma dellas. Esta alteração por excesso é, sem duvida, muito menos viciosa do que sel-o-hia uma alteração por desfalque, que é necessariamente impossivel aqui; mas, nem por isso constitue menos um grave inconveniente do nosso actual systema de geometria analytica, visto como certas definições geometricas não são traduzidas algebricamente com escrupulosa fidelidade, por não saber-se tomar em consideração analytica as

restricções que lhes são inherentes. E' sobretudo na applicação da analyse aos phenomenos thermologicos que se fez sentir esta imperfeição, estorvando o estudo especial das leis do aquecimento e do resfriamento, para os casos lineares em que, como muitas vezes acontece, só se deve considerar uma parte limitada de cada linha. Tambem é ao immortal fundador desta nova theoria, principal creação mathematica propria ao seculo actual, que a geometria deve a solução effectiva desta fundamental difficuldade, até então julgada insuperavel. Mas, embora Fourier tenha assim introduzido equações que apenas representam realmente partes assignalaveis de cada linha, essa importante modificação exige complicações analyticas taes que têm impedido até hoje, e talvez sempre, de tornal-a verdadeiramente usual e sobretudo elcmentar. Devemos, pois, resignar-nos finalmente á aceitação actual de uma tal imperfeição sem inquirirmos do remedio, salvo as precauções especiaes que, em cada caso opportuno, poderão preservar-nos de falsas indicações por ellas suscitadas.

Consiste uma de suas consequencias geraes em não se saber tão pouco representar analyticamente um contorno descontinuo, por exemplo, o perimetro de um triangulo ou qualquer outro polygono. Em geometria analytica a composição dos lugares se traduz naturalmente pela multiplicação de suas equações, uma vez que se haja tomado antes a precaução indispensavel de tudo reunir em um só membro sob a fórma usual $f(x, y)=o$. De facto, sendo nullo um producto, por isso mesmo que o é um de seus factores, a menos que o outro não se torne accidentalmente infinito, e não podendo aliás annullar-se de outro modo, é evidente que o lugar geometrico da equação $f(x, y)\times\varphi(x, y)=o$ consiste na reunião das duas linhas provindas separadamente das equações $f(x, y)=o$, $\varphi(x, y)=o$. De acôrdo com isto, si equações representassem porções de linhas, poder-se-hia por seu producto representar o contorno descontinuo que resultasse da juxtaposição dessas linhas. No systema actual, porem, não poder-se-hia, ao contrario, multiplicando conjunctamente, por exemplo, as equações dos tres lados de um triangulo, formar por modo algum uma só que fosse restricta ao seu perimetro; tambem conviria ella a todos os pontos situados sobre os prolongamentos indefinidos dos lados. Assim, a lacuna da nossa geometria analytica, relativamente a partes de linhas, pelas suas necessarias consequencias, muito se aggrava em referencia aos contornos

compostos, cuja consideração deve naturalmente offerecer-se em diversos casos importantes, sobretudo em thermologia mathematica. A concepção analytica de Fourier remediou o segundo inconveniente do mesmo modo que o primeiro, e aliás independentemente do principio da multiplicação, mas sempre por processos mui penosos para serem admittidos no ensino elementar da geometria geral, que continuaremos a considerar como aggravada desta dupla imperfeição natural.

Sob o segundo aspecto fundamental, a representação das equações por linhas correspondentes deve habitualmente ser julgada imperfeita, pois que ahi só se levam em conta soluções reaes, sem ter em apreço as imaginarias, que ficam no entanto abstractamente inseparaveis e não raro são muito mais numerosas, a ponto de ás vezes constituirem a unica resposta comportada pela equação, mesmo attribuindo sómente valores reaes á variavel independente, segundo um uso aliás já contrario á inteira generalidade analytica. Não se acredite, entretanto, que a imaginariedade destas soluções deva em principio embargar-nos necessariamente toda e qualquer interpretação geometrica, visto como têm entre si mui apreciaveis relações tanto geometrica como algebricamente; salvo a facillima precaução de traçar differentemente a parte do painel total que lhes é concernente, pontuando-a, por exemplo. Assim é que a equação $x^2+y^2=1$, que no modo ordinario só é representada entre $x=-1$ e $x=+1$ pelo circulo OA (fig. 4), produziria de mais a mais a hyperbole $BCB'C'$ se estipulassemos construir, abstracção feita do factor commum $\sqrt{-1}$, as ordenadas imaginarias que correspondem a todas as outras abcissas reaes. Semelhante pintura das soluções imaginarias, porem, só poderia até aqui convir a um pequeno numero de casos sufficientemente simples, fóra dos quaes a necessaria imperfeição da analyse mathematica provavelmente impedirá sem-



(*Fig. 4*)

pre de completar convenientemente a representação geometrica das equações (*). Portanto, consideraremos tambem esta segunda lacuna geral como inherente ao nosso systema actual de geometria analytica e soffrer-lhes-hemos as consequencias naturaes sem occupar-nos do remedio.

Destas consequencias, a que mais importa prever desde já, consiste na alteração que recebe em certos casos o principio fundamental acima estabelecido sobre a representação necessaria de toda equação por uma linha. Com effeito, si a equação apenas admitte uma unica solução real, como por exemplo, $x^2+y^2=o$ que só é satisfeita por $x=o$ e $y=o$, ou só comporta um numero limitado, não produzirá geometricamente senão um numero igual de pontos, que poderiam mesmo provir tambem de uma infinidade de outras equações; de sorte que desde então a figura estará longe de caracterisar effectivamente a equação correspondente. Quando a equação não comportar solução real, não terá mais especie alguma de lugar geometrico, e esta circumstancia relativa, não á necessidade, mas nossa impotencia, envolverá confusamente uma multidão de equações que são analyticamente mui distintas entre si como $x^2+y^2+1=0$, $x^3+y^4+1=0$, $x_4+y^4+1=0$, $y^2+e^x=0$, *etc.* Por causa de semelhante lacuna, certas modificações analyticas não comportarão interpretação geometrica alguma. Assim é que de modo algum mudar-se-hia o lugar de uma equação multiplicando-a por qualquer das precedentes, ainda que então ficasse algebricamente desnaturada.

9.— Para acabar de esclarecer quanto possivel esta exposição elementar da concepção fundamental propria ao complexo da geometria analytica, falta-nos indicar uma importante consideração geral, pouco apreciada até hoje, e que hade pôr mais ás claras a correspondencia necessaria entre as idéas de linha e as de equação, fazendo sentir que cada definição rigorosa de uma curva não só deve ser capaz de dar logar a uma equação correspondente entre as coordenadas que quizermos, mas que já constitue por si mesma uma primeira equação da curva, relativamente a um certo systema de coor-

---

(*) Um joven geometra, M. Marie, antigo alumno da escola polytechnica, acaba de conceber esta pintura das soluções imaginarias de um modo mais profundo e mais geral do que em qualquer das tentativas anteriores, de maneira a obter algumas vezes felizes e inesperadas approximações, sem aliás fazer-se nenhuma grave illusão sobre a realização usual de tal aperfeiçoamento.

denadas em harmonia conveniente com esta definição. Entretanto, para evitar a este respeito qualquer confusão e exageração, cumpre préviamente restringir semelhante observação sómente ás definições que indicam uma geração da linha proposta, de maneira a fornecer logo uma descripção por pontos ou por movimento continuo. Comtudo, esta restricção não altera a generalidade intrinseca de tal observação, pois que uma curva qualquer comporta necessariamente semelhantes definições, quando mesmo não fosse definida senão por uma propriedade caracteristica e não explicativa, como seja a propriedade isoperimetra do circulo já mencionada. Salvo esta unica reserva, é facil comprehender que não se póde especificar a geração de uma curva a não ser segundo alguma relação immediata, de ordinario mui simples, entre certas coordenadas naturaes que a ella se refiram. As difficuldades que primeiro se encontrassem em seutir esta evidente necessidade só poderiam provir essencialmente do modo muito acanhado de encarar a noção geral dos systemas de coordenadas, e desappareceriam desde que se attribuisse commumente á esta concepção preliminar toda a extensão que lhe demos precedentemente. Por exemplo, a definição elementar do circulo constitue espontaneamente a sua equação polar $u=r$, tomando o polo no centro; sua definição como logar do vertice de um angulo invariavel ν, cada lado do qual passa por um ponto fixo, se traduz immediatamente pela equação $\varphi—\varphi=\nu$, entre as coordenadas angula es que medem as inclinações variaveis dos lados moveis sobre o eixo fixo; a definição da ellipse ou da hyperbole como logares de um ponto, cuja somma ou differença das distancias a dous pontos fixos permanece constante, dá logo a equação $u\pm t=c$, no systema de coordenadas que determina a posição de um ponto por meio de suas distancias aos dous pontos fixos propostos; a geração commum das tres secções conicas pelo movimento de um ponto, cujas distancias a um ponto fixo e a uma recta fixa são constantemente proporcionaes, fornece logo a equação $u=mt$ no systema, meio rectilineo, meio polar, que corresponde a esta definição. O mesmo se dá a respeito das curvas transcendentes, como teremos occasião de verificar especialmente sobre a definição ordinaria da cycloide e em muitos outros casos. Seria agora superfluo multiplicar taes verificações, as quaes terei o cuidado de assignalar em cada caso opportuno. Facilmente se concebe, em principio, que a geração de uma linha não poderia ser definida senão especificando a lei do movimento do ponto descrevente. Ora, esta lei só comporta definição precisa por intermedio de uma certa relação entre os dous movimen-

tos quaesquer, seja de translação, seja de rotação, nosquaes o movimento proposto se decompõe; esta relação, encarada sob um outro aspecto, constituirá pois a equação natural da linha considerada, em relação ao systema de coordenadas correspondente, que ha de variar com a linha e sobretudo com a definição. Esta consideração geral, antes de mim desconhecida, torna mais evidente a harmonia fundamental entre as linhas e as equações, desprendendo espontaneamente a sua noção philosophica de qualquer difficuldade relativa á formação effectiva de cada equação procurada. De facto, si, segundo este principio, toda curva tem directamente uma equação em um certo systema de coordenadas, não póde haver mais duvida de que a mesma curva não deva igualmente comportar equações equivalentes em todos os outros systemas, salvos os obstaculos que poderá offerecer a realização da transição.

Ao mesmo tempo aprecia-se assim em que consiste essencialmente o embaraço muitas vezes apresentado pelo estabelecimento das equações. Nunca poderia esse obstaculo suscitar difficuldade grave alguma, si podessemos sempre escolher o systema de coordenadas, visto como obteriamos logo a equação adoptando o que fosse conveniente á definição proposta. Mas, por motivos que abaixo vão indicados, devemos commumente restringir-nos a um systema uniforme de ante-mão prescripto, e sobretudo ao systema rectilneo propriamente dito, que não é constantemente, nem mesmo habitualmente, o mais bem adaptado á formação das equações. Vê-se, pois, que a principal difficuldade propria a esta formação consiste, em geral, na passagem do systema primitivo e natural para esse systema definitivo e artificial. Esta apreciação comporta nma grande utilidade pratica em toda a geometria analytica, fornecendo o unico conselho efficaz que possa admittir este inevitavel preambulo, que, por sua naturesa, está fora da sujeição de qualquer methodo systematico. Cumpre, com effeito, de acordo com o que fica dito, partir sempre d'esta equação espontanea e depois dirigir todos os esforços especiaes para a eliminação d'essas coordenadas primitivas, com o auxilio das duas relações que se descobrirem entre ellas e as coordenadas definitivas, empregando algumas vezes com o titulo de auxiliar, segundo o espirito ordinario das investigações mathematicas, um ou mais systemas intermediarios, com o fim de facilitar esta indispensavel transição. Uma judiciosa applicação d'este conselho geral, sem dissipar a difficuldade, as vezes muito grande, apresentada pela formação das equações, tenderá pelo

menos a prevenir o vicioso desperdicio de forças que n'este ponto resulta frequentemente de tentativas empiricas e desordenadas, cujo exito seria quasi impossivel.

10.— A precedente consideração nos conduz naturalmente a completar a nossa exposição fundamental pela apreciação geral dos motivos que fizeram dar, em geometria analytica, ao systema rectilineo propriamente dito, a preferencia universal que justamente lhe tem sido concedida até hoje por um uso essencialmente espontaneo, e que deve d'ora em diante resultar de uma comparação racional.

Para que esta discussão seja luminosa e decisiva, importa previamente separar nella os dous aspectos elementares cuja combinação permanente é apresentada pela nova geometria, pois, a escolha deve ser mui differente, conforme considerarmos, ou a representação analytica das linhas ou a pintura geometrica das equações.

Sob o primeiro aspecto provisoriamente isolado nenhum systema de coordenadas poderia evidentemente merecer uma preferencia invariavel, quer quanto á facilidade de formar a equação de cada linha, quer quanto á simplicidade da equação obtida; visto como, segundo o numero precedente, ora é n'um systema, ora em outro qualquer, que cada definição fornece logo uma equação simplicissima. O uso preponderante do systema rectilineo não poderia, pois, haver de modo algum resultado d'essa primeira ordem de motivos, que levaria a escolher successivamente cada um dos outros systemas imaginaveis, para os casos adaptados a sua natureza.

O mesmo, porem, não acontece sob o segundo aspecto, que manifesta claramente uma superioridade constante e necessaria d'este systema sobre outro qualquer no que é concernente á representação geometrica das equações, quanto á facilidade e nitidez de semelhante pintura e por conseguinte quanto á sua efficacia logica. Esta vantagem resulta em primeiro lugar da natureza das linhas empregadas, visto que os pontos são ahi evidentemente determinados pela intersecção das mais simples linhas possiveis. Comtudo, esta primeira explicação não bastaria, pois existe, como já vimos, uma infinidade de outros systemas de coordenadas em que igualmente só se introduzem linhas rectas. Portanto, é mister, para precisar convenientemente tal discussão, attender tambem ao modo de variação destas linhas, o que acaba de pôr em evidencia esta superioridade geral do systema ordinario. Com effeito, o deslocamento de

uma recta por uma simples translação parallelamente a um eixo fixo constitue por certo a maior simplicidade possivel n'uma imagem geometrica, que, por seu destino, deve sempre conter algum elemento variavel. Podemos, portanto, considerar esse systema como sendo necessariamente aquelle em que melhor se representa a correspondencia elementar entre o movimento do ponto e a variação numerica de suas coordenadas; d'onde devemos concluir sua aptidão superior para a interpretação geometrica de todas as considerações analyticas.

Prolongando mais esta apreciação, póde-se mesmo explicar a preferencia habitualmente concedida, no uso do systema rectilineo, ao emprego de eixos rectangulares. Esta escolha não emana essencialmente da noção mais familiar de semelhante inclinação, nem aliás das simplificações analyticas que muitas vezes comporta, porém, que em certos casos, pertenceriam, pelo contrario, a outros angulos. Segundo um motivo, a um tempo mais constante e mais profundo, esta disposição dos eixos deve ser encarada como a mais conveniente á representação geometrica, que de outra sorte não poderia effectuar-se de modo tão fiel. Com effeito, eixos rectangulares dividem o plano em quatro regiões exactamenie identicas, entre as quaes o lugar geometrico, que quasi sempre occupa mais de uma, não poderá representar outras diversidades graphicas além das que provierem das soluções correspondentes da equação proposta. Pelo contrario, com eixos obliquos cada uma dessas regiões só é igual á sua opposta e differe da sua adjacente, onde a pintura da equação será alterada pelo emprego de uma nova obliquidade, independentemente de qualquer origem analytica. Si considerarmos, por exemplo, uma equação em que não influa sobre a ordenada a mudança de signal da abscissa, como $x^2+y^2=1$, $x^4+y^4=1$ etc., a curva, estəndida então nas quatro regiões deveria naturalmente, para pintar a equação com fidelidade, offerecer quatro partes symetricas susceptiveis de perfeita coincidencia. Ora, esta condição, preenchida espontaneamente com eixos rectangulares, não o poderia ser sufficientemente com eixos obliquos que, só igualando essas quatro regiões duas a duas, indicarão uma viciosa diversidade onde a equação prescreve inteira identidade. Semelhante painel seria então pouco adequado a facilitar as especulações analyticas, segundo o seu principal destino logico, visto como só poderiamos empregal-o ficando sempre prevenidos contra tal discordancia.

O complexo da apreciação precedente explica assás a praxe, conservada desde a origem da geometria analytica, de preferir habitualmente a qualquer outro systema de coordenadas o rectilineo rectangular, unico em que hão de ser aqui construidas as nossas theorias geraes. Porem, concebe-se tambem que, mau grado a sua superioridade constante para a discussão geometrica das equações, deva ser elle ás vezes abandonado em relação a certas curvas, afim de evitar a excessiva complicação das equações correspondentes. Nas applicações concretas da geometria abstracta, pode-se aliás empregar especialmente outras coordenadas, sem mesmo ter em vista a simplificação das equações, e unicamente como susceptiveis de melhor interpretação physica : assim é que foram os astronomos levados a preferir habitualmente as equações polares, a respeito de curvas cujas equações rectilineas seriam todavia mais simples.

11.—Sendo o systema polar até aqui o unico realmente usado quando se renuncia o rectilineo, importa especificar para com elle a comparação geral que acabamos de estabelecer, pondo em relevo as imperfeições elementares que o tornam pouco proprio a uma conveniente pintura das equações, além da menor facilidade, e conseguintemente menor nitidez apresentadas nesta direcção, por sua natureza opposta á do outro systema, de acôrdo com os motivos acima indicados. Deve-se reconhecer, com effeito, que, debaixo de dous aspectos essenciaes, nem mesmo comporta este systema inteira fidelidade, neste sentido—que soluções analyticamente distinctas são nelle ás vezes representadas por um mesmo ponto, sem que o painel geometrico possa então haver em conta alguma as suas differenças numericas. Esta confusão elementar tem lugar á principio quando um mesmo valor da ordenada linear corresponde a dous valores da ordenada angular, que entre si differem de quatro angulos rectos ou de qualquer multiplo inteiro de 360°, o que pode não raro acontecer, e, por exemplo, todas as vezes que a equação proposta só contem funcções trigonometricas do angulo. Em taes casos, a natureza do systema polar impede de certo a representação geometrica destas diversidades numericas, o que nunca se pode dar em coordenadas rectilineas, nem mesmo em muitos outros systemas. Por isso, o systema polar é com justiça reservado, de ordinario, para as equações que contêm o angulo algebricamente, como as das espiraes, e deve ser especialmente evitado em relação ás que só encerram funcções periodicas. Mas semelhante confusão manifesta-se de modo ainda mais grave soh

um outro aspecto mais universal, pela impotencia necessaria do systema polar para representar geometricamente as differenças de signal + ou — quando estas só affectam ao raio vector. A necessidade propria ao systema rectilineo de attribuir signaes ás coordenadas para completar as determinações elementares, foi felizmente convertida por Descartes em uma preciosa aptidão para pintar geometricamente este importante genero de diversidades analyticas. Pelo contrario, a propria independencia de uma tal obrigação, que á primeira vista parece constituir uma vantagem do systema polar, tornou-se reciprocamente a fonte necessaria de uma imperfeição capital, impedindo essencialmente semelhante representação. Comtudo, a verdadeira natureza desta grande lei de Descartes permitte ainda no mesmo systema a pintura do signal com referencia á variavel angular, porquanto basta então contar o angulo em sentido contrario ao que foi affecto a seus valores positivos. Si, porém, a mudança de signal refere-se ao raio vector, a construcção polar não poderá com certeza leval-a em conta, por isso que este raio, cuja direcção muda de continuo, não é susceptivel de uma verdadeira opposição de sentido. Faz-se mal em acreditar algumas vezes tel-a representado contando como negativos os valores de cada raio vector em sentido opposto ao que se tenha attribuido conforme o angulo correspondente, se esses valores houvessem sido positivos, como OM' comparado a OM (fig 2). E' claro, com effeito, que OM' realmente não corresponde ao angulo φ, mas ao valor $180^{o}+\varphi$, que, dest'arte, não mais poderia achar, sobre a figura, lugar algum distincto. Provém sem duvida tal erro do habito mui exclusivo de equações polares em que esta opposição de valores não é bem saliente, por causa de funcções puramente trigonometricas de φ. Bastaria, porem, considerar, por exemplo, as equações das espiraes $u=a\varphi$, $u^2=a\varphi$, $u\varphi=a$, $u=a^{\varphi}$, etc., para sentir de prompto a inconveniencia geral de uma tal interpretação.

Como esta ultima explicação, por mais racional que espontaneamente seja, é no entanto directamente contraria a uma usança escholastica mui commum, importa recordar incidentemente a este respeito o verdadeiro espirito, hoje muito desconhecido, da grande lei descoberta por Descartes do destino concreto dos signaes + e — nas relações analyticas. Cumpre primeiro reconhecer que esta proposição capital de philosophia mathematica ainda não está realmente demonstrada, a não ser por simples verificações especiaes, sem nenhuma apreciação directa e geral ; sómente estas verificações

são muito mais multiplicadas agora e sobretudo mais variadas do que poderiam tei sido para Descartes, cujo genio analogico fez surgir esta admiravel inducção da feliz approximação de um minimo numero de casos. Sob este ponto de vista, os geometras actuaes mostram-se mesmo algumas vezes, cumpre confessal-o, menos adiantados a certos respeitos do que os do XVII seculo, por isso que, repugnando-lhes sobremaneira uma logica puramente inductiva, tomam muitas vezes n'este assumpto verificações limitadissimas por verdadeiras demonstr ações. De mais, talvez seja mister pensar que semelhante proposição não comporta explicação *a priori*, e deve sempre ficar fundada sobre puras inducções, sem que a sua certeza seja todavia affectada. Ao menos a impotencia radical dos esforços tentados, para esse fim, ha dous seculos, e ás vezes por espiritos superiores, muito autorisa semelhante opinião. Ainda que a sciencia mathematica seja de todas aquella em que a extrema simplicidade do objecto comporta o emprego preponderante das deducções, não poderia comtudo este emprego ser inteiramente exclusivo; e algumas noções capitaes, como esta, devem ficar puramente inductivas. Aceitando, ao menos quanto ao presente, esta irrecusavel necessidade, é preciso sobretudo esforçarmo-nos por bem reconhecer o verdadeiro sentido geral, ordinariamente mui confuso, desta grande lei cartesiana. Consiste ella em que toda verdadeira inversão nas graudezas concretas susceptiveis de recebel-a traduz-se analyticamente pela mudança de signal dos valores abstractos correspondentes. Isto quer dizer que, tendo sido formada a equação de um phenomeno qualquer por um unico estado destas diversas grandezas, todas as outras dlsposições muitas vezes complicadissimas (conforme a potencia de 2 que o seu numero indica) que resultarem de suas inversões combinadas, corresponderão exactamente a equações deduzidas da primeira, simplesmente pelas mudanças de signal convenientes, de sorte que, uma dellas sufficientemente interpretada poderá condensar todas as outras. Sem insistir aqui sobre as vantagens tão evidentes quanto eminentes desta descoberta fundamental, sobretudo inteiramente indispensavel á existencia da geometria analytica, devemos sentir que esta lei obsta a interpretação concreta do signal, em referencia ás grandezas que, contadas em direcções variaveis, não poderiam comportar uma verdadeira opposição de sentido; pois, desde que se reconhece que a mudança de signal exprime a inversão, nenhuma outra attribuição

póde jámais comportar, sob pena de ficar reduzida a um destino vago e até arbitrario. O que significa, por exemplo, a pretendida differença de signal entre os raios vectores OM e OM' applicada ao conjuncto das direcções? Ella reduz-se evidentemente a suppor positivos os raios tirados para cima do eixo $O\Phi$ e negativos os tirados para baixo. Ora, a distincção assim estabelecida entre estas duas classes é ficticia e illusoria, como atendo-se apenas á interposição deste eixo: concebamos supprimida essa vã separação e não haverá certamente mais differença real entre OM e ON, que então se affecta de signaes contrarios, do que entre OM e OK, a que todavia dá-se o mesmo signal; isto torna logo saliente o quanto semelhante uso é radicalmente contrario a toda e qualquer interpretação da lei do signal concreto.

12.—Após haver inteiramente exposto a concepção fundamental propria ao conjuncto da geometria analytica, remataremos este capitulo preliminar com duas explicações indispensaveis e espontaneamente correlativas, a primeira sobre a verdadeira theoria da homogeneidade geometrica, a segunda sobre a construcção elementar das formulas algebricas.

A grande lei da homogeneidade, a mais extensa de quantas comporta até hoje a philosophia mathematica, pois que se applica necessariamente a toda e qualquer relação do abstracto para o concreto, é ainda de ordinario muito mal concebida, tenha eu embora ha treze annos, no 1º tomo da minha *Philosophia positiva*, estabelecido sufficientemente o seu verdadeiro espirito geral. Para explicar este facto notavel—que toda equação tendo um sentido geometrico, e essencialmente linear é constantemente *homogenea*, isto é, que, no caso mais usual, todos os seus termos são naturalmente do mesmo *gráo* algebrico—, limitam-se quasi sempre a notar esta circumstancia evidente quanto ás relações iniciaes consideradas com razão como a origem, mais ou menos afastada, de todas as relações possiveis entre linhas e que são essencialmente reductiveis ao theorema de Pythagoras sobre o triangulo rectangulo e ao de Thales sobre a proporcionalidade dos lados entre dous triangulos equiangulos, proposição que aliás comprehende logicamente a outra. Em consequencia desta observação incontestavel sobre a homogeneidade das equações primitivas, e admitindo que nem as transformações ulteriores de cada uma dellas nem as suas mutuas combinações podem jámais alterar semelhante caracter, ter-se-hia sufficientemente demonstrado que elle deve tambem estender-se ás mais remotas de-

ducções. Porem esta supposição mui gratuita é certamente viciosa, senão quanto ás transformações, pelo menos quanto a certas combinações; por exemplo, quando som mam-se duas equações homogeneas de gráos differentes, a sua somma de modo algum constitue uma equação homogenea.

Restaria, pois, explicar po rque as deducções geometricas jámais conduzem a semelhantes agru pamentos, o que por certo seria mais difficil do que estabelecer directa mente a lei geral da homogeneidade. Os que sentiram este vicio radical da mais usada explicação, sem todavia ascender ao verdadeiro principio philosophico desta theoria, foram levados a alter ar essencialmente a propria lei para adaptal-a á insufficiencia de sua demonstração, introduzindo nella uma alternativa que, no fundo, destruiria radicalmente o sentido effectivo da proposição. Desta arte faz-se hoje consistir o theorema da homogeneidade em que tod a equação geometrica é necessariamente homogenea, *ou* pelo menos a somma de equações homogeneas. Com semelhante enunciado, é claro que a proposição torna-se insignificante: de facto, qual é a equação escripta ao acaso por um algebrista que não se possa conceber decomposta em equações homogeneas, uma vez que se tenha a precaução de grupar os seus termos de modo conveniente? E' com certeza impossivel fazerem os que assim entendem a lei da homoge neidade uso algum real dos preciosos meios de continua verificação que ella é sobretudo destinada a fornecer espontaneamente em todas as applicações possiveis da analyse mathematica.

13.— Sem nos demorarmos mais nesta viciosa doutrina, procedamos directamente á verdadeira explicaçã o. Assenta ella sobre esta unico principio, tão geral quanto evidente: a exactidão de toda relação concretà, quer geometrica, quer mesmo mecanica, ou physica, etc., sendo necessariamente independente da grandeza da unidade ou das unidades introduzidas para a avaliação numerica, a equação correspondente deve conservar-se inalteravel quando fazemos experimentar a cada uma das quantidades elementares a variação resultante da mudança de unidade, e que consiste em multiplical-as todas por um mesmo fa ctor arbitrario. Afim de melhor apreciar as consequencias analyticas, de uma tal propriedade a respeito das equações algebricas propriamente ditas, nas quaes cumpre especifical-a, importa distinguir dous casos, conforme a relação contenha apenas grandezas de uma só especie, ou de muitas especies distinctas.

No primeiro caso, o mais commum em geometria analytica, suppondo, para fixar as idéas, que se trate, por exemplo, de uma relação entre linhas, reduz-se tudo a bem apreciar o effeito isolado da mudança proposta sobre cada termo da equação. Ora, tornando-se m vezes maiores todos os factores que exprimem as linhas consideradas, é facil reconhecer a principio que todo e qualquer termo do primeiro gráo achar-se-ha multiplicado por m, seja qual fôr a sua forma algebrica, não só quando é racional e inteiro, como $3a$, $\frac{2}{3}a$, na, etc, mas tambem quando é fraccionario como $\frac{ab}{e}$, $\frac{abcd}{efg}$, etc., ou mesmo irracional como

$$\sqrt{ab},\quad \sqrt{\frac{abcde}{fgh}},\sqrt[3]{\frac{abcd}{e}},\sqrt[5]{abcde}\ \text{etc.},$$

avaliando sempre o gráo segundo as regras ordinarias da algebra, salvo a indispensavel precaução de nunca contar outros factores que não os verdadeiramente lineares, sem participação alguma dos que por diversas razões não se alteram com a mudança de unidade. Isto posto, cada um dos termos de gráo superior ficará assim com uma forma qualquer m^2, m^3, m, etc, vezes maior, conforme seja do 2º, 3º, 4º, etc, gráos como producto de igual numero de factores do primeiro gráo, Em resumo, todos os termos do mesmo gráo seja qual fôr a sua dissemelhança algebrica, hão de então variar na mesma razão, e todos os de differentes gráos, por mais semelhança que possa offerecer sua composição, ficarão desigualmente multiplicados. Vê-se por ahi que, sem alteração, só poderá a equação experimentar a modificação proposta por uma exacta paridade de gráo em todos os seus termos, o que constitue a parte mais usual da lei da homogeneidade, no que é concernente ás equações algebricas propriamente ditas. Quanto ás equações ditas transcendentes, isto é, exponenciaes, logarithmicas, etc, fornecer-lhes-hia o mesmo principio fundamental equivalentes condições analyticas, sob formas variaveis com a natureza das funcções, e que seria superfluo, sobre tudo neste tratado, especificar antecipadamente.

Considerando agora o segundo caso geral, destacam-se dous modos mui distinctos, conforme as diversas unidades heterogeneas sejam independentes entre si ou subordinadas umas a outras. Si não têm nenhuma ligação necessaria, como acontece em geometria para as relações ao mesmo tempo lineares e angulares, a

lei da homogeneidade conservará evidentemente o mesmo sentido fundamental, mas com maior variedade de prescripções do que no primeiro caso, visto como todos os termos hão de então apresentar o mesmo gráo, quer se lhes contem unicamente os factores lineares ou sómente os factores angulares, ou as duas especies ao mesmo tempo, em virtude da mudança correspondente de cada uma ou de muitas dessas unidades independentes. Mas, quando, pelo contrario, devem as unidades embora heterogeneas conservar uma determinada subordinação, a lei fica necessariamente modificada, por isso que não se póde mais avaliar o gráo de cada termo segundo a pratica puramente algebrica, por meio da simples enumeração uniforme dos factores convenientes. E' necessario então apreciar esses diversos factores segundo suas respectivas origens, applicando-lhes uma certa ponderação analytica derivada da ligação primitiva das unidades. Para formular esta ponderação nas equações geometricas em que podem coexistir comprimentos, areas e volumes, basta reconhecer que o encadeiamento das tres unidades é então necessariamente tal que, tornando-se a primeira m^3 vezes menor, fica-o a segunda m vezes, e a outra m' vezes. De acordo com isto, a homogeneidade deve então existir contando cada factor superficial como dous factores lineares e cada factor solido como tres. Ainda que este modo diffira essencialmente do precedente, a sua natureza igualmente determinada torna-o do mesmo modo proprio para fornecer espontaneamente em geometria uteis verificações algebricas.

No caso, o mais frequente, das relações entre linhas, convem comprehender como a homogeneidade ás vezes pode cessar effectivamente, como as formulas trigonometricas offerecem muitos exemplos. Ora, nunca provém esta cessação, como em trigonometria senão de ter-se escolhido para unidade uma das proprias linhas a considerar, que, desde então expressa pelo numero 1, não se conta mais entre os factores que partecipam da avaliação do gráo, em consequencia do uso natural de sempre despresar numericamente o factor 1, quer como multiplicador, quer como divisor. Ficando assim alterado o gráo de cada termo que encerra esta linha, ao passo que não se altera o dos termos em que ella não entra, concebe-se que não existirá mais a homogeneidade algebrica. Continuaria ella a subsistir levando-se em conta convenientemente o factor 1; mas então, evidentemente perder-se-hia toda vantagem analytica que comporta uma tal escolha da unidade, sempre destinada a

simplificar as formulas, e seria preferivel adoptar uma unidade claramente distinta das linhas em relação.

Segundo uma tal apre ciação é facil sentir reciprocamente que, si partin do de uma equação assim alterada, desejarmos restabelecel-a em seu estado primitivo, basta, em virtude da lei da homegeneidade, usar do direito numerico de introduzir a nosso talante o multiplicador ou o divisor 1, de modo a reduzir todos os termos ao gráo commum que quizermos, tendo em conta estes factores 1. Substituindo depois para maior clareza este signal 1 por uma letra indeterminada, a equação voltará necessariamente á forma que teria tido a principio, relativamente a uma unidade independente das linhas consideradas. O uso ordinario equivale sem duvida á regra precedente, mas sobrecarregada de um circuito mui superfluo, e ás vezes penoso, derivado da noção assás imperfeita que commumente se fórma da lei da homogeneidade. Em geral, não receio assegurar que toda a difficuldade relativa, quer á concepção desta lei, quer á sua applicação, será espontaneamente dissipada por todo leitor intelligente, remontando convenientemente ao principio fundamental que domina o conjuncto desta theoria, sem que seja preciso insistir mais aqui sobre semelhantes explicações.

14.—Depois de ter sufficientemente estabelecido a lei da homogeneidade, é preciso terminar este indispensavel preambulo geral, indicando summariamente as regras elementares da *construcção* das formulas algebricas, préviamente tornadas homogéneas segundo o modo precedente.

Consiste a construcção de uma formula em substituir as operações numericas que ella prescreve para a avaliação da incognita correspondente por um systema equivalente de operações graphicas, que, combinando convenientemente as linhas proporcionaes aos numeros dados, faça desta figura sahir uma linha proporcional ao numero procurado. Importa desde já evitar a confusão desta construcção das *formulas* com a construcção das *equações*, que constitue uma questão muito mais difficil e importante, a qual seria actualmente prematura e será cuidadosamente tratada no fim de nosso estudo. Na construcção das equações, tratar-se-hia, com effeito, de substituir equivalentes graphicos, não só ás avaliações numericas, senão tambem e sobretudo ás transformações algebricas, muitas vezes impossiveis, que exigiria a resolução analytica das equações correspondentes. Na construcção das *formulas* consideramos todas as equações possiveis como resolvidas e nada mais

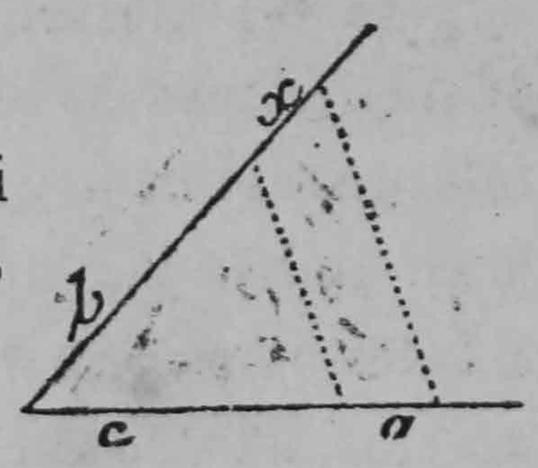
resta a fazer do que uma simples determinação arithmetica, qu desejamos substituir por uma determinação geometrica. Semelhante substituição quando não exige figuras demasiado complicadas, deve ser sem duvida muito conveniente em geometria analytica, para facilitar e aperfeiçoar a interpretação final dos resultados algebricos. Mas em relação ás formulas um pouco compostas exigiria ella uma tal accumulação de linhas que a solução ficaria antes obscura do que clara. Por isso, muitas vezes dispensamo-nos de executar estas construcções quando mesmo fossem estrictamente possiveis, e limitamo-nos a conceber em geral a linha procurada por meio da avaliação numerica (realizada, ou sómente projectada) da formula correspondente. Entretanto, é indispensavel conhecer as regras, aliás facilimas, desta operação elementar, e dirigir sempre o seu emprego por uma judiciosa apreciação das conveniencias de cada caso.

15.—Si nestas figuras artificiaes podessemos indifferentemente admittir todas as linhas, nenhuma formula poderia existir que não fosse evidentemente susceptivel de uma construcção qualquer, ou com linhas já empregadas ou com o auxilio de novas imaginadas expressamente para este unico fim, como muitas vezes fizeram os antigos. Mas, segundo um uso antigo que merece ser cuidadosamente respeitado, de ordinario só julgamos plenamente satisfcetorias as construcções em que apenas entram linhas rectas e circulos. Isto tem logar porque nenhuma outra curva é assás facil de descrever para tornar-se verdadeiramente usual, excepto em algumas occasiões especiaes, que em sua mór parte pertencem mais á construcção das equações do que á das formulas propriamente ditas, segundo nossas ulteriores explicações. Ora, assim concebida, a construcção das formulas fica necessariamente restricta, por esta obrigação geometrica, a casos pouco variados, relativos todos a funcções puramente algebricas, que, mesmo quando são irracionaes, não devem conter outros radicaes que não os do segundo gráo ou seus derivados. O ponto de vista geral em que nos colloca a geometria analytica explica de prompto esta necessidade, cujo peso natural haviam os antigos arduamente sentido, sem poder com prehender-lhe a origem racional. Resulta ella, com effeito, de que, pela natureza das equações proprias á linha recta e ao circulo, como depois veremos, jámais pode combinação destas especies de linhas corresponder a outras funcções que não aquellas. Conforme uma tal condição geral, examinemos agora os modos elementares de construcção proprios aos diversos casos alge-

bricos desta ultima especie, e em primeiro logar no que respeita ás formulas racionaes.

Quando estas são inteiras, e por conseguinte, do primeiro grau, sendo seus termos da fórma $2a$, $5a$, $\frac{3}{4}a$, na, $\frac{p}{q}a$, etc., podem ser facilmente construidas, quer immediatamente, quer pela repetição, quer por meio do theorema das linhas proporcionaes. Em seguida, a sua addição e subtração facilmente transformar-se-hão em juxtaposição e superposição dos comprimentos correspondentes.

Tratando-se de formulas fraccionarias om que o numerador e o denominador são monomios, a construcção elementar de uma quarta proporcional bastarà espontaneamente para o caso mais simples, $x = \frac{ab}{c}$, em que a combinação conveniente das linhas c, a, b, segundo a regra conhecida determinará logo a linha x (fig. 5). Ora, outra qualquer fracção deste genero é reductivel á precedente por meio de quantidades auxiliare susceptivel cada uma de igual construcção. Si $x = \frac{abcd}{efg}$, poderemos fazer $x = \frac{ab}{e} \times \frac{cd}{fg}$, e desde então uma quarta proporcional permitindo substituir ao primeiro factor $\frac{ab}{e}$ uma linha auxiliar e', tornar-se-ha a fórmula $x = \frac{e'cd}{fg}$, com diminuição de uma unidade no numero dos factores nos dous termos. A repetição conveniente desta reducção produzirá um novo abaixamento de grau, e assim por diante, até que o denominador seja reduzido ao primeiro grau, como no caso elementar, sem jámais exigir outras construcções senão as de quartas proporcionaes, em numero total igual ao grau primitivo do denominador.

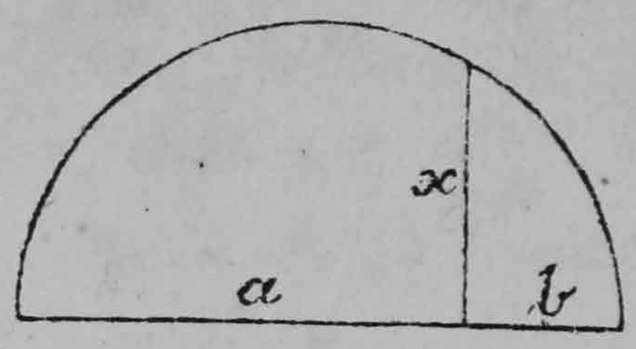


(*Fig. 5*)

Quando o numerador e o denominador são polynomios, é preciso tornal-os monomios por meio de certas linhas auxiliares destinadas a dar a todas as partes do numerador os mesmos factores que a uma dellas, salvo um só convenientemente escolhido, e o mesmo em relação ao denominador ; segundo o que, sua composição geometrica só dependerá afinal de juxtaposições ou superposições. Seja, por exemplo, $x = \frac{abcde + fghik - lmnpq}{rstu - noch}$; fazendo $fghik = abcde'$, $lmnpq = abcde''$; $rstu = abcd'$, $noch = abcd''$; sendo cada uma das linhas auxiliares e', e'', d', d'', evidentemente determinavel por uma serie de qnartas proporcionaes, eliminando os factores com-

muns teremos $x = \frac{d\,(+\,e' - e'')\,e}{d' - d''}$, cuja construcção não apresenta mais difficuldade alguma. O numero total das quartas proporcionaes dependerá ao mesmo tempo do numero dos termos e do gráo de cada polynomio, de maneira a tornar-se mni consideravel nos casos um pouco complicados.

Passando agora ás formulas irracionaes do segundo grau, devemos considerar a formula $x = \sqrt{ab}$ como a unica susceptivel de construcção immediata, por meio da figura elementar destinada a traçar uma media proporcional; substituir-se-ha deste modo a multiplicação e a extracção indicadas por equivalentes graphicos de onde resultará (fig. 6) a linha x. Ora, todos os outros casos deste genero, por mais complicados que possam ser, são necessariamente reductiveis a este, com o auxilio das duas especies de tranformações que acabam de ser explicadas, ou quanto ao abaixamento do grau nas fracções, ou para a composição dos polynomios. Todas as formulas irracionaes do segundo grau poderiam assim ser construidas afinal por meio das quartas proporcionaes relativas á funcção collocada sob cada radical, fazendo-as seguir de uma media proporcional relativa ao mesmo radical. O emprego do theorema de Pythagoras seria pois, em rigor, constantemente evitavel. Entretanto seu uso judicioso conduzirá alSumas vezes, na composição dos polynomios, a construcções mais simples.



(Fig. 6)

Afim de condensar em um só exemplo a applicação dessas regras de construcção elementar das formulas algebricas, proponha-se construir $x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{b}}{c - \sqrt{d}}}$. Começar-se-ha restabelecendo a homogeneidade, de onde $x = \sqrt{\frac{ai^2 + i^2\sqrt{bi}}{c - \sqrt{di}}}$, designando i a unidade. Construindo os dous radicaes darciaes $\sqrt{bi}$, $\sqrt{di}$, por outras tantas medias proporcionaes h e k, e obsevando que os termos do numerador têm já dous factores communs ter-se-ha $x = \sqrt{i \times \frac{i(a+h)}{c-k}}$ Formando então $a+h$ por juxtaposição-

e $c-k$ por superposição e traçando uma quarta proporcional m, a, $c-k$, i, $a+h$, resultará finalmente de uma media proporcional entre i e m.

Convido os principiantes a exercitarem-se espontaneamente sobre outros exemplos, sem comtudo perderem muito tempo com estes exercicios.

CAPITULO II

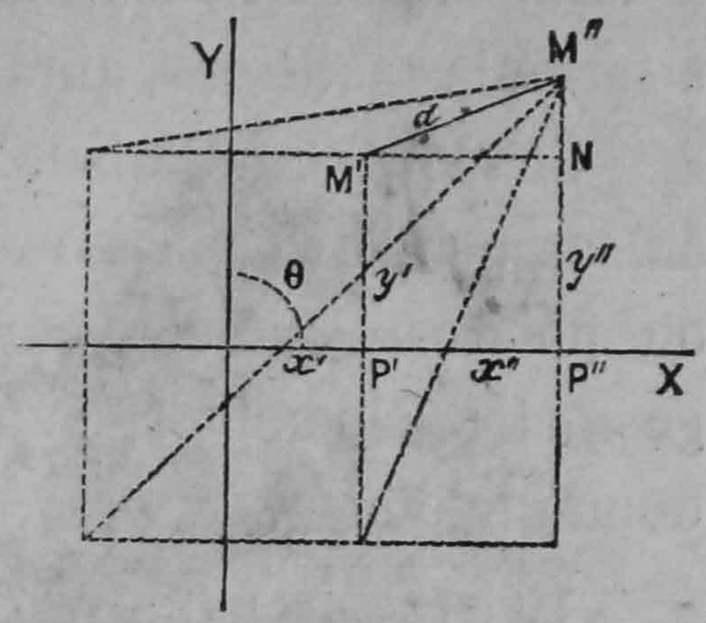
PRINCIPAES EXEMPLOS PRELIMINARES DA FORMAÇAO DAS EQUAÇÕES DE DIVERSAS LINHAS SEGUNDO A EQUAÇÃO DESTAS, E PRIMEIRO ESBOÇO DA DISCUSSÃO GEOMETRICA DESTAS EQUAÇÕES.

16.— A concepção fundamental da geometria analytica, ainda que directamente estabelecida no capitulo precedente, não seria sufficientemente comprehendida, si, depois desta indispensavel exposição geral, não consagrassemos cuidadosamente o capitulo actual a tornar especialmente familiar esta intima harmonia mutua entre as linhas e as equações, por uma conveniente gradação de exemplos caracteristicos. Serão além disto escolhidos de modo a fazer já conhecer ao leitor as principaes curvas a que deveremos ao depois applicar as theorias essenciaes da geometria analytica.

Antes de tudo, importa estabelecer uma formula elementar extremamente usual para determinar a distancia de dous pontos segundo suas coordenadas, primeiro e sobretudo rectilineas, depois tambem polares. Semelhante consideração deve naturalmente serão frequente na mór parte das operações da geometria analytica, que, formulando-a aqui isoladamente, evitar-se-hão ao depois numerosas e fastidiosas repetições incidentes.

Em coordenadas rectilineas, bastará tirar, pelo ponto mais baixo

M' (fig. 7), uma parallela ao eixo dos x até o encontro N da ordenada do ponto mais elevado M", para conceber logo a distancia procurada d como terceiro lado de um triangulo M' N M", cujos dous outros M"N, M'N, são respectivamente iguaes ás differenças, $y"-y'$, $x"-x'$, das coordenadas correspondentes, e formão um angulo N supplementar do dos eixos. Desde então, si os eixos são rectangulares, o que constitue o unico caso verdadeiramente usual, o theorema de Pythagoras fornecerá logo esta formula: *a distancia de dous pontos equivale á raiz quadrada da somma dos quadrados das differenças de suas coordenadas respectivas*, ou, em estylo algebrico,



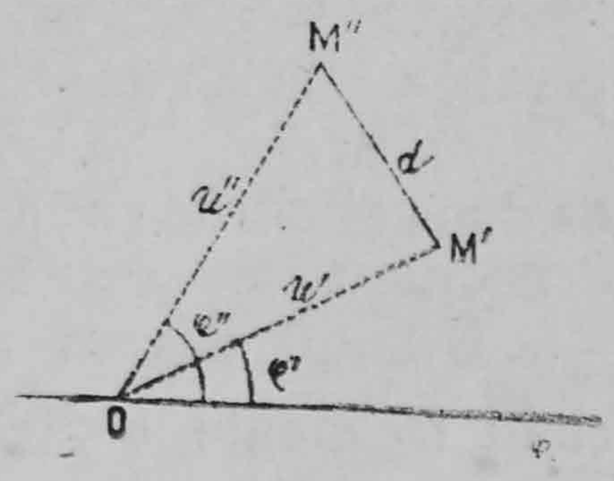
(Fig. 7)

$$d=\sqrt{(y"-y')^2+(x"-x')^2}.$$

Quando os eixos são obliquos, é preciso evidentemente, segundo a regra trigonometrica conveniente, sommar debaixo do radical o dobro do producto das duas differenças pelo coseno do angulo dos eixos ou $2(y"-y')(x"-x')\cos\theta$

A respeito desta formula indispensavel, o leitor deverá cuidadosamente verificar, mas sómente para os eixos rectangulares, com a lei do signal permitte condensar em uma expressão unica os quatro casos que resultariam naturalmente, como o indica a figura, das tres outras disposições que poderiam offerecer os dous pontos. Pois que esta grande lei geral só repousa verdadeiramente até aqui sobre simples verificações especiaes, importa não desprezal-as em todos os casos caracteristicos e mui usuaes, ainda que não convenha entretanto multiplical-os em excesso, o que acabaria por alterar notavelmente a utilidade real de semelhante regra.

Em coordenadas polares, vê-se tambem (fig. 8), que a distancia procurada constitue o terceiro lado de um triangulo, em que os dous outros lados são naturalmente os dous raios vectores $u"$, u', e comprehendem um angulo igual á differença das coordenadas angulares $\varphi"$, φ': d'onde resulta immediatamente a formula $d=\sqrt{u"^2+u'^2-2u"u'\cos(\varphi"-\varphi')}$, em que o sentido da subtracção angular é evidentemente indifferente, segundo

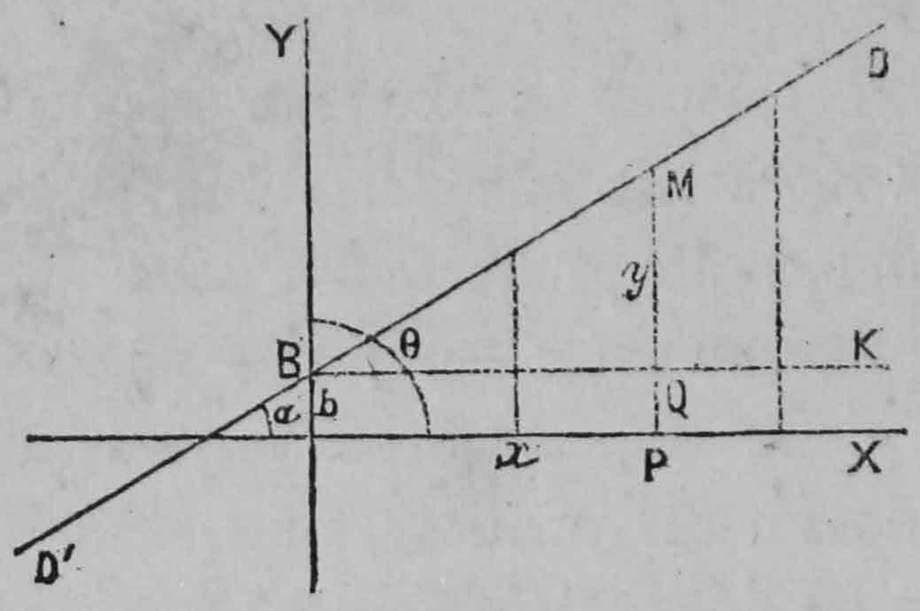


(Fig. 8)

á natureza dos cosenos, tudo como para as subtracções lineares proprias á formula rectilinea, ainda que por um outro motivo analytico.

Sendo agora estabelecida, esta dupla formula preliminar procedamos primeiro á mais simples formação das equações, ou rectilineas, ou polares, que convenhão ás duas unicas linhas já estudadas em geometria elementar, e cuja discussão deverá, por consequencia, nos demorar pouco.

17. 1º.— EXEMPLO. *Equações da linha recta.* As coordenadas rectilineas, devem ser, por sua natureza, eminentemente favoraveis á indagação da equação geral da linha recta. Basta então considerar esta linha como o logar dos pontos cujas distancias a dous eixos fixos estão em razão constante, quer se meçam essas distancias perpendicularmente ou sob outra qualquer inclinação commum. Semelhante propriedade dá logo a equação rectilinea de toda recta passando pela origem. Quando ella por ahi não passa, como DD' (fig. 9), que corta o eixo dos y em B, á distancia b da origem, é facil reduzir este caso geral ao precedente, contando as ordenadas a partir da horizontal BK, o que reduz-se a diminuil-as todas de b. Então, para um ponto qualquer M da recta, a relação $\frac{y-b}{x}$ é constante. Chamando-a a e resolvendo a equação em relação a y, a equação geral da linha recta será



(Fig. 9)

$$y = ax + b$$

que coincide evidentemente com a equação completa do primeiro grão a duas variaveis. A constante a, igual á relação de MQ para BQ, dependerá da direcção da recta, conforme o angulo α que forma com o eixo dos x. Será ella, segundo o principio fundamental da resolução dos triangulos, igual á tangente trigonometrica deste angulo, no caso mais usual, em que os eixos são rectangulares. Porem, se fôrem obliquos, o mesmo principio indicará a como exprimindo, em geral, a relação dos senos dos dous angulos formados pela recta com os dous eixos dos x e dos y, ou $\frac{sen\alpha}{sen\,(0-\alpha)}$.

O leitor deverá tornar-se extremamente familiar, por um exercicio frequente e variado, com a significação geometrica de todas as circumstancias algebricas proprias a esta equação fundamental, que

representará successivamente todas as rectas do plano, attribuindo ás constantes arbitrarias a e b os valores convenientes. Primeiramente, o numero, de nenhum modo accidental, destas constantes corresponde geometricamente ao numero de pontos por onde deve passar uma recta para que seu curso inteiro seja determinado. Em seguida, a lei da homogeneidade indicaria sósinha, independentemente da figura, que a constante b deve ser linear e a angular. (*)

Reciprocamente, se examinarmos em coordenadas rectilineas, abstracção feita das noções precedentes, o logar geometrico da equação geral do primeiro grão a duas variaveis, far-se-ha facilmente surgir a linha recta. Desembaraçando y sob a forma $y=ax+b$, esta equação indica a principio, por sua composição uma linha illimitada a direita e á esquerda, continua, e de um só ramo, pois que todo valor, positivo ou negativo, da variavel independente x fornece constantemente um valor real, finito e unico, para a variavel dependente y. Porém estes caracteres, evidentemente demasiado vagos, não poderiam deixar sufficientemente a descoberto a natureza rectilinea do logar (**). Dissipa-se racionalmente toda incerteza a este respeito concebendo a equação sob a forma $\frac{y-b}{x}=a$, que indica as ordenadas, previamente diminuidas de b, pelo transporte do eixo OX para BK, como proporcionaes ás abscissas; o que caracterisa logo

---

(*) Se a fosse considerado como linear, assim como uma tangente tringonometrica o é com effeito, a equação não seria mais homogenea; mas isso proveria evidentemente de ter-se tomado para unidade o raio trigonometrico. Seria preciso então restabelecer a homogeneidade, escrevendo, segundo a regra,

$$y=\frac{a}{r}x+b.$$

Deve-se pois preferir habitualmente conceber a como uma simples funcção abstracta do angulo α; eis porque tenho-lhe, ha muito tempo, applicado a denominação caracteristica de *coefficiente angular*, que começa agora a tornar-se espontaneamente de um uso universal.

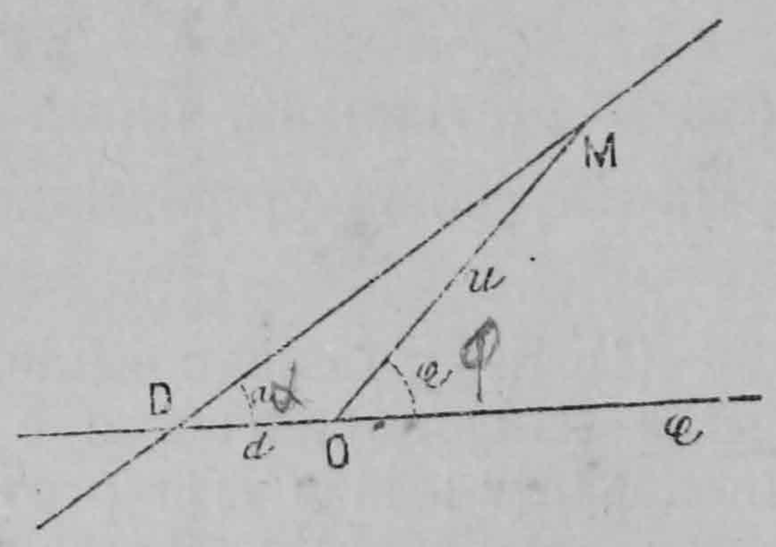
(**) Quando a e b são especificados em numeros, esta apreciação final resultaria materialmente da construcção correcta de grande numero de soluções particulares exactamente avaliadas: os principiantes não devem desdenhar, seja para a linha recta, seja para o circulo, ou mesmo para alguns outros casos bem escolhidos, o uso provisorio dessas verificações grosseiras, que, máo grado sua evidente insufficiencia mathematica, têm o feliz privilegio de melhor familiarisar logo com o sentimento elementar da harmonia fundamental entre as linhas e as equações, assim reduzida a uma simples intuição physica, constituindo o mais alto gráo possivel de clareza.

a linha recta. A constante b sendo o valor de y para $x=o$, representa pois necessariamente a distancia da origem ao ponto em que a recta encontra o eixo vertical. Quanto á constante a, evidentemente angular, determina ella immediatamente o angulo do logar com o eixo horizontal, segundo a lei $tang.\ \alpha=a$, se os eixos são rectangulares; suppondo-os obliquos, ter-se-hia $\frac{sen\ \alpha}{sen\ (0-\alpha)}=a$, donde, desembaraçando trigonometricamente o angulo α por meio da formula que desonvolve $sen\ (0-\alpha)$, é facil deduzir a lei, mais geral, porém mais complicada,

$$tang\ \alpha=\frac{asen\,0}{1+acos0},$$

que comprehende a precedente, quando nella se faz $0=90°$.

Se agora quizermos a equação geral da linha recta em coordenadas polares, é facil sentir que a natureza deste segundo systema è quasi tão favoravel a semelhante indagação como a do primeiro. Pois, ter-se-hia logo a equação evidente $\varphi=\alpha$, para uma recta que passasse pelo polo. Ora, quando ella passa a uma distancia d sobre o eixo $O\varphi$ (fig. 10), o caracter geometrico é sempre o mesmo, isto é, que a corda tirada de um ponto qualquer M a um ponto dado D, em que este logar corta o eixo, forma aqui com este eixo um angulo constante α, ao passo que teria em qualquer outra linha uma inclinação variavel. Sómente esta definição se formúla então com mais trabalho do que no primeiro caso. Porem exprimir-se-ha facilmente segundo o principio da resolução dos triangulos, que traduz immediatamente esta propriedade pela equação polar



(*Fig. 10*)

$$u=\frac{dsen\alpha}{sen\ (\varphi-\alpha)}.$$

Contém ella, como a equação rectilinea, duas constantes arbitrarias em razão do numero de pontos que exige a determinação da linha; sente-se que esta circumstancia analytica reproduzir-se-hia necessariamente em qualquer outro systema de coordenadas. Estas duas constantes são ainda aqui, uma linear, outra angular; porquè a idéa geral de uma linha recta comprehende, por sua natureza, ao mesmo tempo uma idéa de distancia e uma idéa de direcção.

A's vezes, á constante linear d, substitue-se a mais curta distancia p da recta ao pólo; o que dá á equação a forma um pouco mais simples,

$$u = \frac{p}{sen\,(\varphi - \alpha)}.$$

Além da inferioridade em geral do systema polar sob o aspecto geometrico, vê-se que a equação da linha recta é analyticamente muito menos conveniente, como sendo transcendente para com uma das variaveis, ainda que algebrica em relação á outra. Tambem esta equação é mui pouco usada.

18.— 2º Exemplo. *Equação do circulo.* A definição elementar do circulo, como lugar dos pontos equidistantes de um ponto fixo, fornece logo a equação ~~quasmo~~, seja rectilinea, seja polar, por meio de nossa formula preliminar para a distancia de douspontos quaesquer. Tem-se assim, em coordenadas rectilineas, e com eixos rectangulares, a equação geral

$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2,$$

ou, desenvolvendo, ordenando e transpondo,

$$y^2+x^2-2by-2ax+(b^2+a^2-r^2)=0,$$

designando a e b a abscissa ordenada do centro, r o raio. O numero destas constantes, igualmente lineares, conforme a lei da homogeneidade, acha-se assim espontaneamente conforme ao numero de pontos exigidos pela determinação de um circulo.

Sob cada uma destas formas, e mormente sob a segunda, esta equação constitue um typo extremamente usual para reconhecer o circulo, n'um tal systema de coordenadas, seja qual possa ser a fonte geometrica, de acordo com o espirito fundamental da geometria analytica. Reconhece-se assim, em sentido inverso, que, afim de uma equação representar um circulo, não basta que seja do segundo gráo. São necessarias, além disto, estas duas condições, indispensaveis e sufficientes: 1º que falte o termo no qual as duas variaveis estão envolvidas; 2º que os dous outros termos do 2º gráo tenhão o mesmo coefficiente. Mediante esta dupla obrigação, a equação, que não contiver mais do que tres coefficientes arbitrarios, tornar-se-ha sempre exactamente semelhavel ao typo precedente; e o desenvolvimento desta comparação determinará os elementos algebricos do circulo correspondente.

Quando os eixos são obliquos, a formula das distancias fornece logo a equação mais complicada

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 + 2(y-b)(x-a)\cos 0 = r^2$$

ou

$$r^2+x^2+2\cos 0.\,xy-2(b+a\cos 0)\,y-2(a+b\cos 0)x+$$
$$+(b^2+a^2+2ab\cos 0-r^2)=0.$$

A primeira das duas condições acima formuladas para que uma equação do 2º grão seja circular, é então só modificada, sem todavia mudar de natureza. Consiste ella sempre em que o termo contendo xy deve ter um coefficiente determinado: sómente o seu valor fixo, em lugar de ser zero, corresponde agora, em geral, ao dobro do coseno do angulo dos eixos, quando se tem préviamente reduzido á unidade o coefficiente commum dos dous termos affectos um de y^2 e outro de x^2. Segundo esta relação, tomada em sentido inverso, uma equação do segundo grão, em que os dous quadrados tivessem coefficientes iguaes, poderia representar um circulo, ainda que as variaveis não estivessem nella separadas. Mas isto só aconteceria para eixos cuja inclinação tivesse um coseno igual á metade do coefficiente do termo em que as variaveis estão envolvidas. Sob outra qualquer obliquidade, o lugar geometrico seria uma outra curva fechada, ulteriormente apreciada, que naturalmente deveria assim comprehender o circulo como caso particular.

Voltando aos eixos rectangulares, unicos verdadeiramente usuaes, convém notar duas fórmas especiaes que toma a equação rectilinea do circulo. Quando o centro está sobre o eixo dos x, sendo b nullo, a equação torna-se

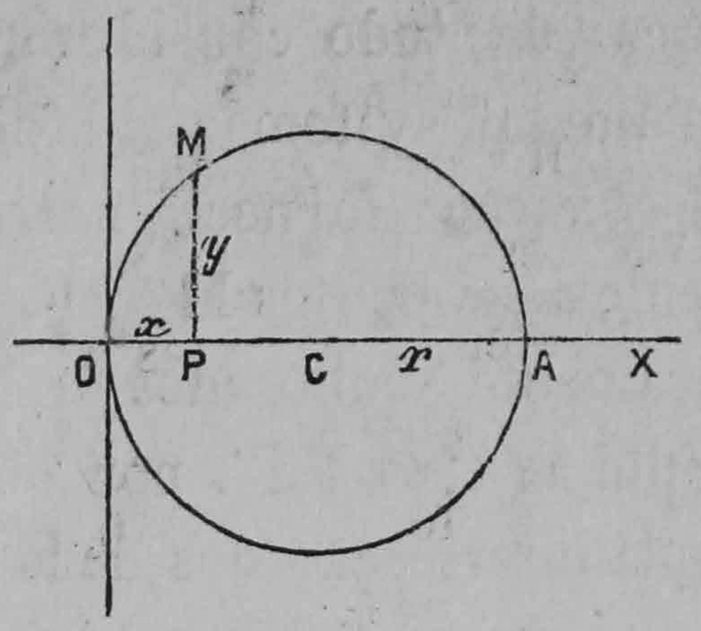
$$y^2+x^2-2ax+(a^2-r^2)=0.$$

Se suppozermos, além disto, que o circulo passa pela origem, teremos $a=r$, e o termo constante desapparecerá, como deve ter lugar, em caso semelhante, para uma curva qualquer, afim de que sua equação possa ser satisfeita pelas coordenadas da origem $x=o$, $y=o$, cuja substituição só deixa subsistir o termo independente das duas variaveis. Tendo em vista esta nova simplificação, a equação toma finalmente a forma notavel

$$y^2=2rx-x^2,$$

cuja interpretação geometrica verifica-se distinctamente, visto com

a ordenada M P (Fig. 11) torna-se assim uma media proporcional entre a abscissa O P e o resto AP do diametro $2r$, segundo uma propriedade bem conhecida do circulo.



(*Fig.* 11)

No caso em que o centro estivesse na origem, a e b annullar-se-hião ao mesmo tempo, e a equação seria então

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

conforme a indicação immediata da figura. Esta ultima forma é, a todos os respeitos, a mais conveniente ordinariamente, quando se tem a livre escolha dos eixos.

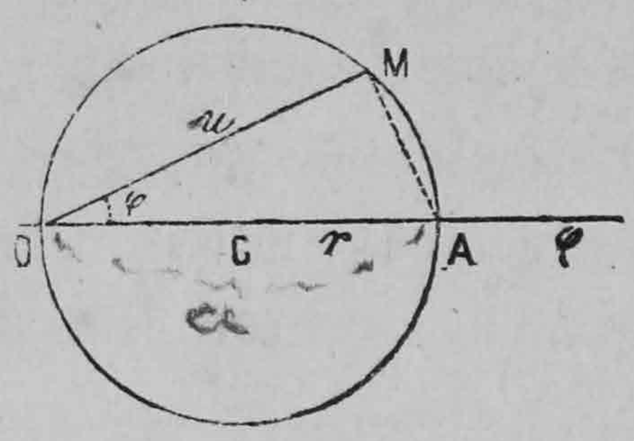
Quanto á equação polar do circulo, ella é evidentemente, segundo á formula das distancias,

$$u^2 - 2\,au\cos(\varphi - \alpha) + (a^2 - r^2) = 0,$$

chamando a e α as coordenadas, linear e angular, do centro. O unico caso particular que importa assignalar aqui é aquelle em que o circulo passa pelo pólo: então $a = r$, e o termo independente de u desapparece, o que deve, *a priori*, acontecer, em caso semelhante a qualquer outra equação polar, afim de que $u = 0$ á ella satisfaça qualquer que seja φ. Pode-se então abaixar sempre de uma unidade o gráu que affecta u nesta equação, pela suppressão do factor commum superfluo. A respeito do circulo, si fizermos, além disto, passar o eixo pelo centro, a equação torna-se finalmente

$$u = 2\,r\cos\varphi$$

forma mui simples, cuja verificação geometrica pode-se com facilidade fazer directamente, considerando que, segundo um theorema conhecido, o triangulo OMA Fig. 12) é assim constantemente rectangulo.

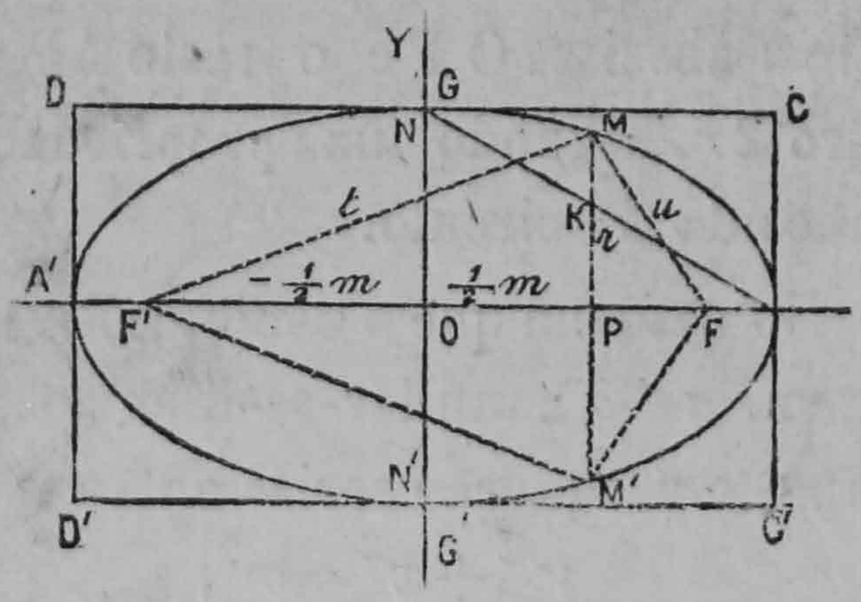


(*Fig.* 12)

19. 3º Exemplo. — *Equação do logar de um ponto cuja somma ou differença das distancias a dous pontos fixos fica constante.* Ainda que esta definição comprehenda dous casos distinctos, a grande analogia analytica destes, deve aqui fazer tratal-os simultaneamente, salvo a justa apreciação de suas differenças necessarias, quer geometricas, quer algebricas.

Discutamos primeiro summariamente, tanto quanto convém á

natureza do systema, a equação espontanea $u+t=m$, entre as coordenadas primitivas do ponto descrovente **M** em relação aos dous pólos **F** e **F'** (fig. 13) E' mister, antes de tudo considerar que, em um tal systema, cada solução da equação fornece necessariamente dous pontos **M** e **M'**, symetricamente collocados relativamente ao eixo **F F'**, por meio da dupla intersecção dos dous circulos correspondentes. Assim, toda equação relativa a este systema indicará naturalmente um logar symetrico em relação a esse eixo. Além disso, a equação actual não mudando apos a troca mutua das duas coordenadas, é facil concluir que a curva será igualmente symetrica (*), em torno da perpendicular GG' tirada pelo meio de FF'.



(*Fig. 13*)

Toda discussão relativa a este systema deve ser cuidadosamente subordinada a uma restricção elementar que lhe é propria, e cuja equivalente não poderiam de modo algum offerecer nem o systema rectilineo, nem o systema polar. Consiste aquella evidentemente nisto—que todas as soluções reaes da equação não poderiam ser geometricamente representadas alli, pois que os dous circulos não se cortariam si os seus raios vectores fossem ou demasiado pequenos ou demasiado differentes, comparativamente ao intervallo fixo de seus centros: chamando-o d, a figura só poderá admittir as soluçoes conformes com as duas disigualdades $u+t>d$, $u-t<d$, o que constituiria aliás uma grande imperfeição especial deste systema, se a sua natureza não o tornasse já radicalmente improprio á uma afortunada pintura das equações. A apreciação effectiva desta dupla restricção permanente determina em cada caso, os limites finaes entre os quaes devem estar compreendidos os valores admissiveis das duas coordenadas.

Após estas noçoes geraes, que d'ora em diante applicarei sem as reproduzir, examinemos primeiramente a equação $u+t=m$. Aqui a condição $u+t>d$, será espontaneamenle satisfeita

---

(*) Pode ser util, para abreviar o discurso, advertir, desde este momento, que esta symetria de uma curva em torno de uma recta, exprime-se muita vez chamando a recta *eixo geometrico*, ou *eixo de figura* ou mesmo simplesmente *eixo* da curva.

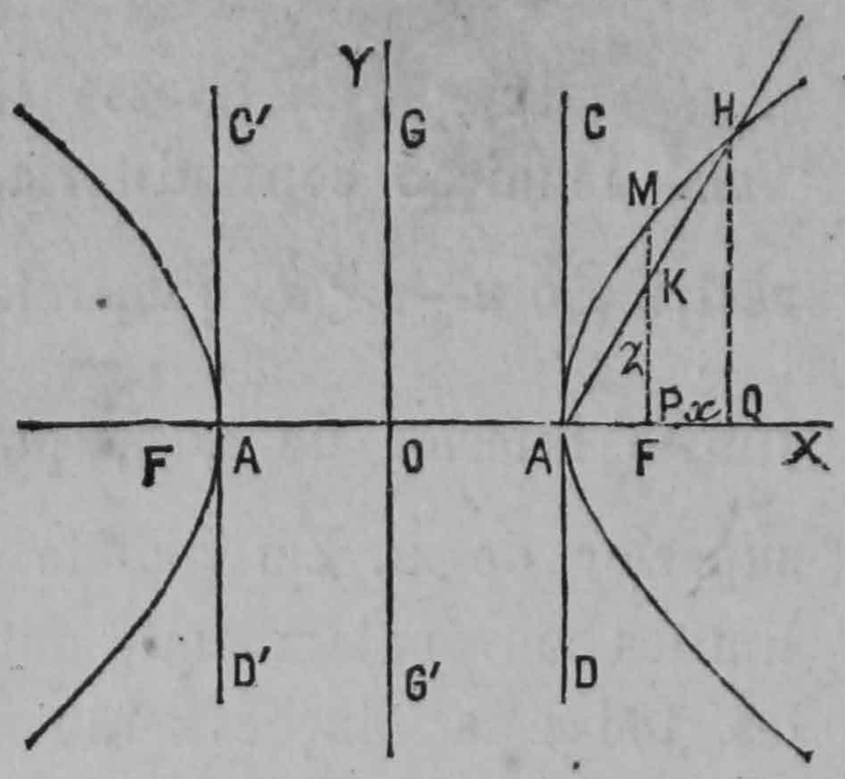
a não ser que m tivesse sido tomado inferior a d, o con stituiria uma definição contraditoria. Deve-se pois sómente considerar a restricção $u-t<d$, que, referindo u a t, assignal-a $\frac{1}{2}(m-d)$ para limite inferior de t, e, por consequencia, $\frac{1}{2}(m+d)$ para limite superior de u. Em virtude da symetria algebrica, cada um destes limites convém tambem a outra coordenada. Como, entre estes limites, todas as soluções serão evidentemente admissiveis, a curva será certamente fechada e continua. Os pontos N e N', em que ella cortar o eixo GG' e cujas coordenadas fôrem ambas iguaes a $\frac{1}{2}m$, achar-se-hão necessariamente mais afastados do eixo F F'. Quanto aos ponto A e A', onde ella encontrar este ultimo eixo, ficarão, um o mais proximo outro o mais afastado, de cada um dos polos F e F'. Attribuindo-lhe, segundo uma regra logica (*) que importa já familarisar, a figura mais simples que possa satisfazer ao conjuncto dos documentos obtidos, teremos a curva ANA'N', salvo a confirmação ou infirmação ulterior :ella tem habitualmente o mome *ellipse*.

Quanto á equação $u-t=m$, cujo logar se chama *hyperbole*, a condição $u-t<d$ achar-se-ha aqui espontaneamente satisfeita, salvo contradicção entre os dados. E' pois da restricção $u+t<d$ que provirão aqui os limites de u e de t, os quaes, por conseguinte, serão sómente inferiores. Os valores $\frac{1}{2}d-m)$, $\frac{1}{2}(d+m)$, determinarão os pontos A, A', em que a curva encontrar o eixo FF', e que serão então collocados entre os dous pólos F, F' (fig. 14). Acima destes limites-as duas variaveis podendo crescer indefinidamente e ao mesmo tempo,

---

(*) Esta maxima, directamente conforme ao verdadeiro espirito philosophico é mui importante para a discussão geometrica das equações em que convêm formar, logo que os documentos analyticos o permittam, uma primeira hypothese sobre a figura geral do logar correspondente, afim de accelerar sua determinação rigorosa, dirigindo mais claramente as comparações ulteriores; contanto que todavia se fique sempre disposto a modificar esta supposição inicial tanto quanto o progresso da discussão poder exigil-o, até que não fique mais incerteza alguma real sobre a figura final. Mesmo quando esta fôr muito mais complicada do que a supposta a principio, a simplicidade da hypothese provisoria não será menos propria a melhor conduzir o complexo da discussão; emquanto os motivos de complicação não houverem sido sufficientemente desvendados, seria pouco judicioso entroduzir outra figura, embora fosse accidentalmente mais approximada da verdadeira.

a curva será necessariamente illimitada, em todos os sentidos, a direita de A e a esquerda de A'. Mas não poderá cortar seu segundo eixo GG', nunca podendo *u* tornar-se igual a *t*: e, afim de que estas variaveis possam conservar entre si a differença constante *m*, é claro tambem que o logar não mais encontrará as parallelas a este eixo que dellas se afastaria mui pouco até uma distancia que seria superfluo fixar aqui, e que a equação rectilinea indicará espontaneamente. Ao mesmo tempo que indefinida, esta curva será pois descontinua, de modo a contrastar totalmente com a forma propria ao primeiro caso. Para proceder agora á formação da equação rectilinea, basta evidentemente empregar nossa formula preliminar das distancias, que substituirá logo as coordenadas primitivas pelas coordenadas definitivas, a quaesquer eixos que se queira referir uma ou outra curva. Vem a pello notar que o esboço de discussão que acaba de resultar da equação natural indica de antemão os eixos mais proprios para simplificar a equação procurada, de acôrdo com a influencia analytica da dupla symetriado logar em torno das rectas FF' e GG'. Si, com effeito, tomarmol-as para eixos, esta propriedade geometrica obrigará a equação a supportar sem alteração a mudança de signal de y quanto á primeira, ou de x quanto á segunda; o que exige evidentemente a ausencia das potencias impares da variavel correspondente; ao passo que, em relação a eixos dirigidos ao acaso, os expoentes impares ter-se-hiam misturado com os pares. Tem-se portanto já a certeza de obter, com eixos taes, uma importante simplificação da equação pedida. E', tanto quanto possivel, em vista de semelhante reducção permanente, que os eixos devem ser, em geral escolhidos, e não de acôrdo com os motivos secundarios relativos á abreviação passageira dos calculos que a formação da equação exige; ou, pelo menos, estes ultimos sómente devem ser tomados, a esse respeito, em consideração decisiva em falta dos outros, que, com effeito, nem sempre são sufficientemente sensiveis,



(*Fig.* 14)

Executando, para com estes eixos FF' e GG, (fig. 13 e 14), por intermedio da formula das distancias, a passagem das coordenada primitivas para as coordenadas decisivas, obtem-se a equação rectilinea

$$\sqrt{y^2+(x-\frac{1}{2}d)} \pm \sqrt{y^2+(x+\frac{1}{2}d)^2} = m$$

que, pela supressão dos radicaes, segundo o modo ordinario, sem nenhum vão artificio algebrico, torna-se emfim

$$m^2y^2+(m^2-d^2)\,x^2 = \frac{m^2}{4}(m^2-d^2).$$

As duas curvas estão confundidas ahi, pois que o desapparecimento dos radicaes parece ter tirado todo o vestigio da distincção dos dous casos. Mas, no fundo, mau grado a sua inevitavel analogia analytica, a differença das duas definições é tão assignalada nesta equação que rectilinea como na equação natural. Pois temos já reconhecido que, para a ellipse, m excede necessariamente á d, ao passo que o inverso tem logar para a hyperbole. Assim, o coefficiente de x^2 passa do positivo ao negativo, substituindo a segunda definição á primeira. E facil reconhecer que uma tal mudança, perfeitamente semelhante que experimenta então a equação natural, representa fielmente o contraste geometrico das duas curvas.

Com effeito, sl se trata da ellipse, teremos assim

$$y = \pm \frac{1}{m}\sqrt{(m^2-d^2)\left(\frac{m^2}{4}-x^2\right)}.$$

Ora, o factor constante debaixo do radical sendo positivo, y não será real senão em quanto o factor variavel conservar esse mesma signal, o que exige que x não exceda á $\frac{1}{2}m$, á direita ou á esquerda; de sorte que a curva está horizontalmente comprehendida entre CC' e DD' (fig. 13). Como y varia aliás em sentido inverso de x, é claro que os pontos N, N' em que a curva cortar o eixo dos y serão os mais afastados do eixo do x, á altura $x\ \frac{1}{2}\sqrt{(m^2-d^2)}$. A ellipse será encerrada no rectangulo CDD'C', e além disto continúa entre esses limites, pois que os valores de y e de x poderão diminuir tanto quanto se quizer.

No caso da hyperbole convirá escrever

$$y = \pm \frac{1}{m}\sqrt{(d^2-m^2)\left(x^2-\frac{m^2}{4}\right)}$$

afim de que o factor constante seja positivo,o que,obrrigando o outro a sel-o tambem, assignará a x o limite inferior $\frac{1}{2}m$, sem limite algum superior: y crescerá desde então com x.Assim, a curva descontinua entre as verticaes CD, C'D' (fig. 14), será aliás indefinida além de cada uma dellas,no sentido dos dous eixos ao mesmo tempo.

Vê-se como a equação rectilinea confirma e aperfeiçoa as indicações já fornecidas pela equação natural sobre a figura geral destas duas curvas. Mas é sobretudo propria para completar semelhante determinação, dissipando a incerteza que nos resta ainda acerca do sentido effectivo da curvatura.Nada até aqui decide, com effeito, si as quatro partes iguaes de que a ellipse se compõe são,segundo nossa hypothese, concavas para o eixo dos x, ou convexas,ou mesmo tortuosas.Os documentos já colhidos poderiam convir igualmente a essas diversas figuras,e do mesmo modo para a hyperbole. Na verdade, uma consideração prejudicial tirada do grau da equação rectilinea solveria especialmente esta difficuldade, indicando que o logar actual não poderia ser cortado em mais de dous pontos por nenhuma recta;pois a equação da linha recta sendo sempre do primeiro grau,sua combinação com a de uma curva qualquer fornecerá necessariamente, em geral,para as abscissas dos pontos communs uma equação do mesmo grau que esta; o que indicará um limite superior,porem muitas vezes demasiado grande, como si o hade reconhecer logo, do numero de intersecções. Semelhante noção dissiparia aqui toda incerteza,excluindo evidentemente outra figura diversa da já supposta. Mas seria pouco conforme ao espirito eminentemente geral da geometria analytica, illudir assim a difficuldade actual por meio de uma consideração especial que tornar-se-hia quasi sempre insufficiente paracom outras curvas,ainda que convenha,demais, utilisal-a nos casos que o comportam. Devemos pois,para caracterisar já a discussão geometrica das equações, afastar este documento accidental, e decidir a questão proposta por um methodo mais ou menos applicavel a uma curva qualquer, comquanto não possa ser agora tão simples como os meios ulteriormente resultados de um estudo mais aprofundado.

Afim de transformar estas considerações geometricas puramente relativas á forma em simples considerações de grandeza,unicas directamente accessiveis ás comparações analyticas, é mister aqui,como a qualquer outro respeito,fazer intervir as considerações de posição, sempre naturalmente destinadas a poupar semelhantes transições. Basta notar, com effeito, que, si o quarto de ellipse A M N (fig. 13), é concavo para a origem, será collocado acima de sua corda A N, ao

passo que se elle deve ser convexo, achar-se-ha, pelo contrario, abaixo; e emfim, alternadamente de um lado e de outro, em caso de sinuosidade. Ora, esta distincção do acima ao abaixo torna-se facilmente reductivel a simples idéa de grandeza, comparando, á abscissa igual, a cordeada M P ou y da curva com a ordenada K P ou z da corda; a questão proposta reduzir-se-ha finalmente a discernir qual destas duas variaveis excede a outra. Calculando z por meio dos dous triangulos semelhantes APK e AON, acha-se

$$z=\frac{1}{m}\sqrt{m^2-d^2}\left(\frac{1}{2}m-x\right),$$

de onde

$$z:y::\frac{1}{2}m-x:\sqrt{\frac{m^2}{4}-x^2}$$

Basta decompôr $\frac{m}{4}-x$ em $\left(\frac{1}{2}m-x\right)\left(\frac{1}{2}m+x\right)$ para constatar logo que y excede a y em toda a extensão da comparação proposta. A curva é pois certamente concava para seus eixos.

Para com a hyperbole, este methodo tem necessidade de uma importante modificação, que necessariamente complica-lhe o uso, pois que uma corda unica parece não poder mais bastar para a apreciação do quarto de curva, então indefinido. Mas vence-se esta nova dificuldade attribuindo á corda AH (fig. 14) uma extremidade indeterminada H, cuja abscissa x deve ficar arbitraria, o que não fará senão sobrecarregar a expressão da ordenada auxiliar KP ou z; a comparação, aliás restricta a uma abscissa x menor quê x', decidirá a questão coma mesma segurança que com mais difficuldade, que no primeiro caso, podendo assim, a corda AH por meio da indeterminação de x'; representar ao mesmo tempo todas as cordas possiveis tiradas de A. A semelhança dos triangulos A K P, A H Q assignala a z a formula

$$\frac{I}{m}\sqrt{\left(d^2-m^2\right)\left(x^2-\frac{1}{4}m^2\right)}\left(\frac{x-\frac{1}{2}m}{x'-\frac{1}{2}m}\right)$$

de onde

$$z:y::\sqrt{x^2-\frac{1}{4}m^2}\left(\frac{x-\frac{1}{2}m}{x'-\frac{1}{2}m}\right):\sqrt{x^2-\frac{1}{4}m^2}$$

Ora, simplificando esta relação quanto possivel, reconhe-

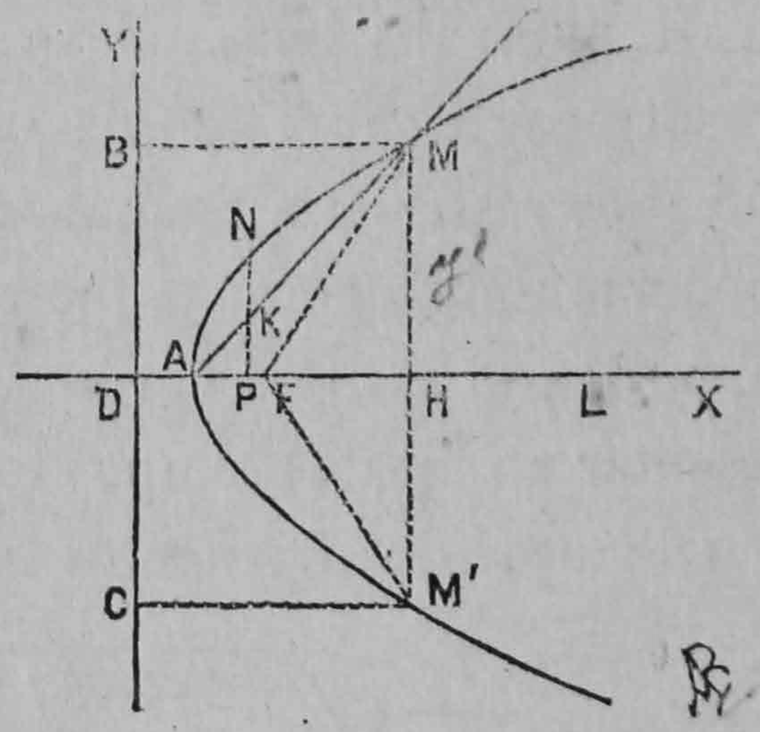
cer-se-ha facilmente que x excede a z emquanto x fica menor que y', ao passo que seria o inverso para $x > x'$, o que constitue uma dupla confirmação decisiva do sentido a principio supposto á curvatura da hyperbole.

A respeito de uma curva qualquer, fechada ou indefinida, o methodo precedente poderá sempre, sob um ou outro de seus dous modos, dissipar irrevogavelmente semelhante incerteza. Mas, ainda que o principio seja, sem duvida, plenamente geral, a execução torna-se muitas vezes impraticavel para com as equações um pouco complicadas; o que fará logo sentir o valor dos processos mais aperfeiçoados que acharemos ao depois. Não menos se deve altamente appreciar já esta notavel transformação de uma questão de forma um uma pura questão de grandeza.

166

20—4º EXEMPLO.—*Equação do logar de um ponto sempre equidistante de um ponto fixo e de uma recta fixa.* Esta curva, chamada *parabola*, compõe com as duas precedentes, o genero de figuras tão celebre, desde os gregos, sob o nome de *secções econicas* e que constituirá, na ultima parte de nosso estudo, a principal especialisação das theorias geraes da geometria plana.

A equação natural, semi-pólar, semi-rectilinea, é aqui $u=t$, entre as distancias variaveis do ponto descrevente ao pólo F e ao eixo BC (fig. 15). De acordo com a natureza de semelhante systema, em que cada ponto é determinado pelo encontro de um circulo tendo sempre seu centro em F com uma recta MM' sempre parallela a BC, toda equação representará necessariamente um logar symetrico em torno da perpendicular de DL tirada de F sobre BC. Além disto, não sendo essa intersecção constantemente possivel, este systema impõe tambem, como o precedente, ,condições restrictivas, pois que o raio variavel do circulo deve exceder a distancia variavel de seu centro a esta recta. Afim de melhor appreciar a influencia actual desta obrigação geral, é mister notar primeiro que, de acordo com a equação $u=t$, será sempre satisfeita á direita do ponto F, e nunca poderá sel-o á esquerda de BC, ou mesmo do meio A de FD que constituirá pois o limite de nossa curva á esquerda de F. Mas, a partir



(*Fig.* 15)

deste ponto A, a parabola estender-se-ha indefinidamente para a direita, afastando-se igualmente de F e de BC, sem discontinuidade alguma, pois que a condição de encontro será desde então espontaneamente prehenchida.

Em virtude desta discussão preliminar, convém, evidentemente passando á equação rectilinea, tomar a recta DL para um dos eixos rectangulares, em virtude da symetria já analyticamente apreciada no numero precedente. Quanto ao segundo eixo, não existe semelhante motivo, e os documentos mais immediatos não parecem a principio indicar ponto algum de DL como uma origem especialmente susceptivel se simplificar a equação procurada. Fazendo pois esta escolha, aliás pouco importante, em virtude de considerações de menor peso, só relativas á formação desta equação, tomaremos a propria recta BC para o eixo dos y. A passagem do systema primitivo ao systema definitivo torna-se assim mui facil, pois que uma das coordenddas naturaes t é conservada com uma simples mudança de nome, e a outra u exprime-se logo em coordenadas rectilineas, segundo a formula das distancias. Obtem-se assim a equação rectilinea

$$y^2 = 2\,dx - d^2,$$

em que d designa o intervallo FD do ponto fixo á recta fixa. E' facil mostrar que a discussão geral desta equação, em que a varaivel x nunca pode ser negativa nem inferior a $\frac{1}{2}d$, mas sem estar sujeita a nenhuma outra condicção, confirma exactamente as indicações grometricas da equação natural. Alem disto, sómente o seu gráo bastaria, como no numero precedente, para demonstrar especialmente a concavidade constante da curva para o seu eixo AL. Mas póde se tambem decidir facilmente esta questão de accordo com o methodo geral já applicado á ellypse e á hyperbole. Pois, considerando a corda indeterminada AM, cuja extremidadade M tivesse uma abcissa arbitraria x', sua ordenada K P ou z, correspondente a uma abcissa qualquer $x < x'$, calcular-se-ha facilmente com o auxilio dos triangulos semelhantes AKP, AMH, donde resultará

$$y : z :: \sqrt{2dx - d^2} : \frac{2x - d}{2x' - d}\sqrt{2dx' - d^2}$$

Ora, segue-se evidentemente, simplificando a relação, que y

excederá a z emquanto x ficar inferior a x', e no caso contrario, em sentido inverso, o que demonstra plenamente a justeza de nossa figura.

A respeito desta equação, pode-se notar, escrevendo-a sob a forma

$$y^2 = 2d\left(x - \frac{1}{2}d\right),$$

que o binomio $x - \frac{1}{2}d$ tornar-se-ha aqui monomio se transportarmos a origem para A. Em virtude de uma tal escolha, a equação torna-se finalmente

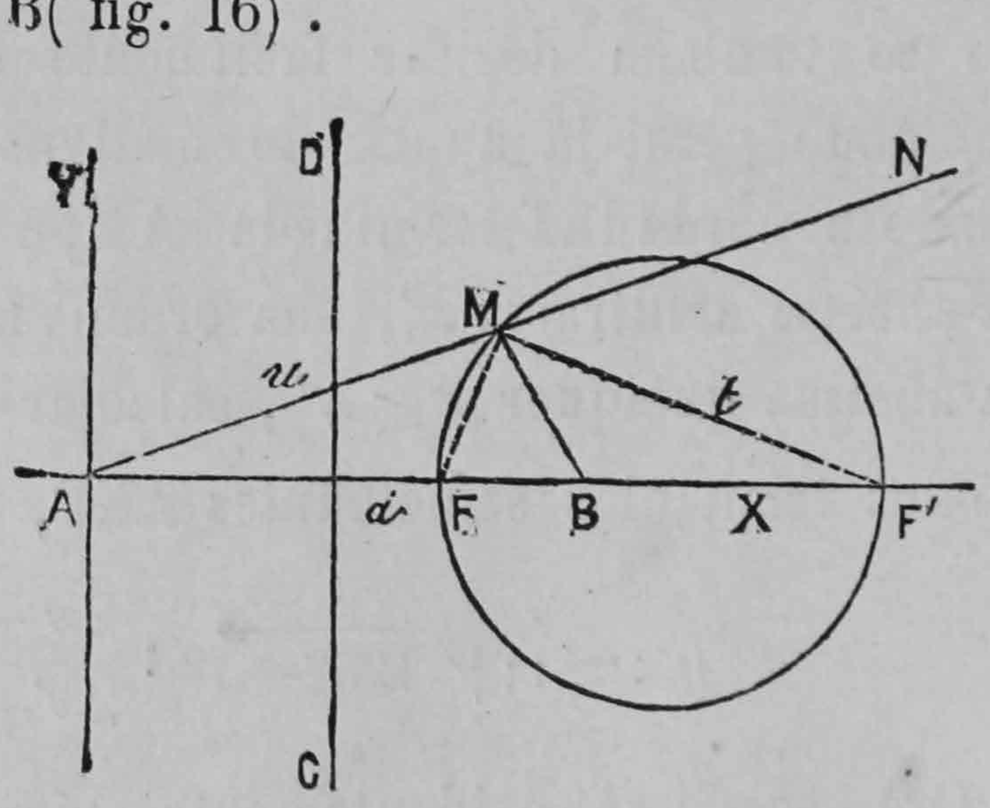
$$y^2 = 2dx,$$

que constitue necessariamente o estado mais conveniente da equação da parabola. Este motivo de preferencia teria sido facil de prever, considerando que, a origem A estando sobre a curva, a equação deve perder seu termo constante, segundo uma observação já assignalada; porém julguei dever, para os principiantes, afastar a principio esta reflexão, como demasiado minuciosa em relação á sua fraca importancia.

Ainda que a forma geral da parabola deva parecer aqui muito analoga á de uma semi-hyperbole, devo todavia advertir que descobrir-se-ha logo, entre estas duas figuras, differenças de aspecto muito apreciaveis em todo tratado judicioso, quando mesmo grosseiro.

21.—5° Exemplo. *Equação do logar de um ponto igualmente illuminado por duas luzes, cuja clareza decresce inversamente ao quadrado da distancia.* Si a e b designam as intensidades conhecidas das duas luzes, esta definição fornece logo a equação natural $\frac{a}{u^2} = \frac{b}{t^2}$ entre as distancias variaveis do ponto descrevente M aos dous focos luminosos A e B(fig. 16) .

Resulta $u = mt$, chamando m a relação constante $\sqrt{\frac{a}{b}}$. As condições restrictivas proprias a este systema (vid. o n. 19) assignalam á t os limites, superior e inferior, $\frac{d}{m-1}$



(Fig. 16)

$e^{\frac{d}{m+1}}$ de onde resultam os de u, e entre os quaes todos os valores são evidentemente admissiveis. Assim, a curva é fechada e continua, e demais symetrica em torno de AB, pela natureza do systema.

Tomando esta recta para eixo dos x, em virtude dos motivos já apreciados, e collocando a origem em A, sem pretender que esta posição seja a mais propria para simplificar a equação rectilinea, acha-se logo

$$(a-b)\,y^2+(a-b)\,x^2-2ad\,x+ad^2=0.$$

A' inspecção de semelhante equação, reconhece-se immediatamente o circulo, por meio do duplo caracter estabelecido no n. 18. Acabando de comparal-a ao typo correspondente, vê-se que, o centro está sobre o eixo dos x, como a symetria o exigia, á uma distancia $\alpha=\frac{ad}{a-b}$; o raio $r=\frac{d}{a-b}\sqrt{ab}$. Pode-se desde então verificar facilmente que a mais fraca das duas luzes é sempre interior ao circulo, e a mais forte sempre exterior. Creio dever aqui fazer notar, em sentido inverso, que duas luzes quaesquer poderiam ser constantemente collocadas, uma dentro, outra fóra de um circulo dado ao acaso, de modo a esclarecel-o igualmente; porque, destas formulas, deduzir-se-hia, reciprocamente, se r fosse conhecido, primeiramente $d=\frac{a-b}{\sqrt{ab}}r$, e portanto, $\alpha=r\sqrt{\frac{a}{b}}$; o que permittiria, qualquer que fosse r, collocar as duas luzes conforme a condição proposta.

No caso de $a=b$, os valores de α e de r tornar-se-hiam infinitos; o que, no fundo, indicaria a inconveniencia especial do typo adoptado. Si, com effeito, remonta-se então a equação do logar, vê-se desaparecerem os termos do segundo grau e a linha muda realmente de natureza, segundo a equação do primeiro grau

$$-2\,adx+ad^2=0,\ ou\ x=\frac{1}{2}d,$$

que indica CD, equidistante das duas luzes, como o caso o exigia.

Ainda que esta questão nos offereça um primeiro exemplo interessante dos recursos geraes que fornecem necessariamente as equações para reconhecer as curvas, apezar da diversidade de suas definições, convém todavia notar aqui que o estudo especial da defini

ção teria facilmente permittido discernir a verdadeira natureza do logar. Porque, marcando sobre o eixo AB, os dous pontos F e F' em que deve cortar a curva procurada, e considerando que a propriedade dada reduz-se, afastando toda a circumstancia physica, á proporcionalidade constante das distancias variaveis MA e MB, ter-se-hão as duas proporções

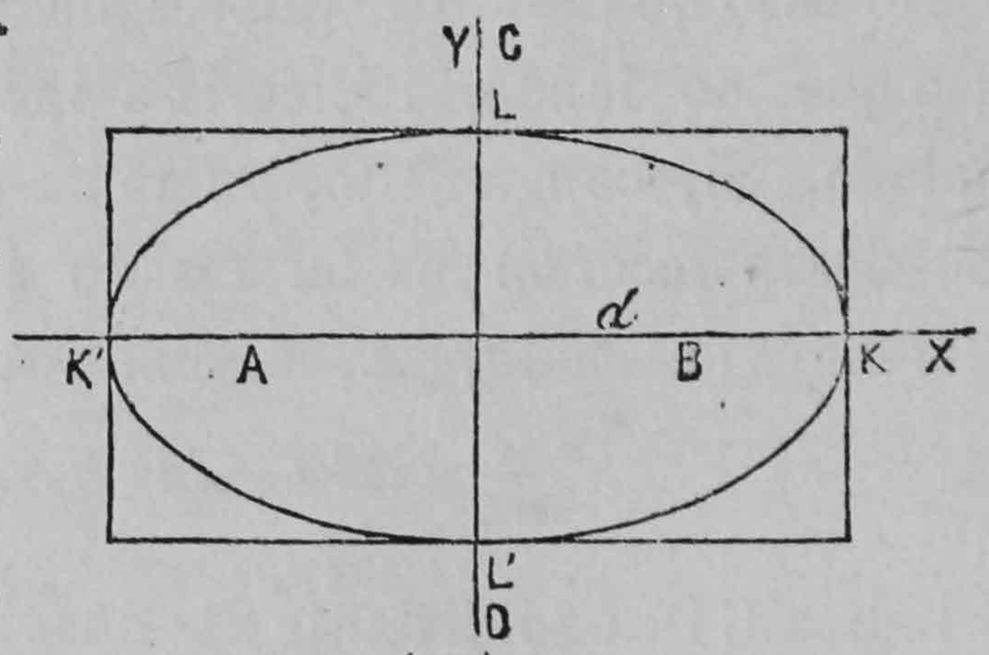
$$MA : MB :: FA : FB,$$
$$MA : MB :: F'A : F'B,$$

que, segundo um theorema conhecido, conduzem a encarar as duas rectas MF, MF' como as bissectrizes continuas dos dous angulos supplementares AMB, NMB; de onde resulta que o angulo FMF' é constantemente recto, o que faz logo reconhecer o circulo, indicando aliás a sua mais simples construcção.

Convindo o circulo precedente indistinctamente a todos os planos tirados pelos dous pontos luminosos, sem nunca mudar de centro nem de raio, póde ser util notar emfim que, si buscassemos em geral, o logar de todos os pontos do espaço igualmente illuminados, achar-se-hia logo uma superficie espherica, tendo o mesmo centro e o mesmo raio que o nosso logar plano. Desde então, a intersecção desta esphera por um plano qualquer, ou por outra qualquer superficie dada, determinaria a curva de igual claridade sobre a superficie correspondente, de modo a resolver a questão proposta em todas as variedades que ella comporta.

189

22. — 6°. Exemplo. *Equação do logar de um ponto, cujo producto das distancias a dous pontos fixos é constante.* No systema natural, identico ao dos ns. 19 e 21, a equação é $ut = m^2$. A natureza do systema indica, como em qualquer outro caso, um ogar symetrico em torno da recta que une os dous polos A e B fig. 17). Além disto, não mudando a equação pela troca mutua das variaveis, a curva deve ser igualmente symetrica em torno da perpendicular CD ao meio de AB. Concebe-se tambem que as restricções proprias a este systema indicam aqui uma curva fechada sujeitando cada variaxel a dous limites determinados, cuja exacta apreciação resaltará todavia muito mais



(*Fig. 17*)

claramente da equação rectilinea. A mais simples fórma que possa corresponder ao conjuncto destes primeiros documentos offerece uma grosseira semelhança com a ellypse, a ponto de ter sido mesmo systematicamente tomada por ella em uma celebre aberração astronomica.

Passando para o systema rectilineo, por meio dos eixos AB e CD, cuja superioridade analytica é já motivada, acha-se facilmente, pela formula das distancias, a equação

193

$$y^4+2(d^2+x^2)y^2+(d^2-x^2)^2=m^4,$$

em que d disigna a semi-distaucia dos dous pontos fixos. Embora do quarto gráo, esta equação póde ser facilmente resolvida, e dá a formula

$$y=\pm\sqrt{-\left(d^2+x^2\right)+\sqrt{4d^2x^2+m^4}},$$

cuja discussão, mais complicada do que em caso algum anterior, constitue a unica difficuldade e o principal interesse de semelhante exemplo: além disto afastei na formula acima o segundo signal do radical parcial, como nunca podendo fornecer ordenadas reaes.

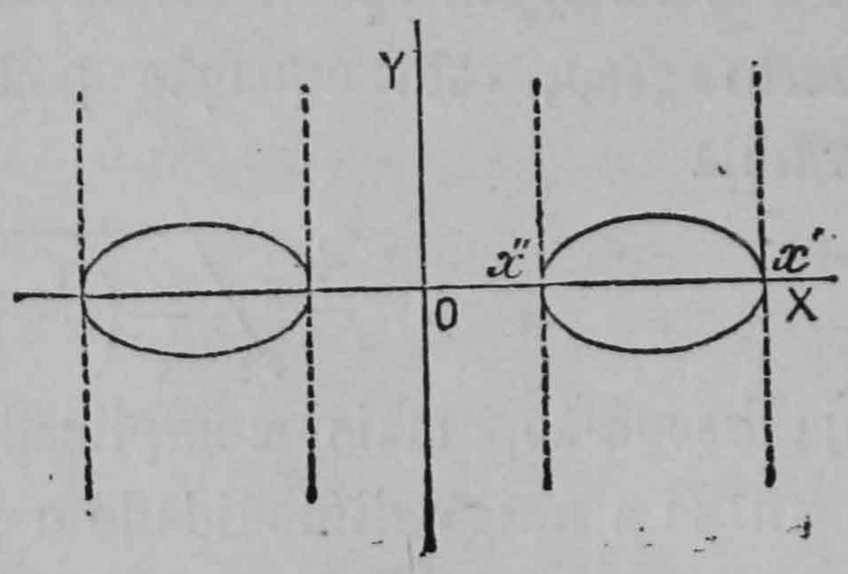
E' facil á primeira vista sentir que a porção negativa da funcção collocada sob o radical geral acabará por sobrepujar cada vez mais a outra, a partir de uma abscisas sufficientemente grande, para a qual, o termo constante de cada uma dellas tornando-se sensivelmente desprezivel em presença do termo variavel, a primeira tende a variar proporcionalmente a x^2 e a segunda a x sómente. A curva é pois sempre limitada no sentido horizontal, e por consequencia tambem no sentido vertical, sendo o accrescimo de y subordinado ao de x. Para achar o limite superior de x, é preciso igualar as duas partes oppostas da formula, o que determinará, de cada lado, a intersecção K ou K', da curva com o seu eixo horizontal, por meio da equação

$$(d^2+x^2)^2=4d^2x^2+m^4;$$

porém, esta equação sendo do quarto gráo, a sua resolução fornece, além do par procurado $x'=\pm\sqrt{m^2+d^2}$, que nenhuma difficuldade apresenta e não comporta distincção alguma, um segundo par $x''=\pm\sqrt{d^2-m^2}$, até então inteiramente imprevisto, e cuja apreciação indica de prompto que a curva não poderia offerecer sempre a mesma fórma segnndo as diversas relações de m para d. Pois, se m excede a d, este par deverá ser rejeitado como imaginario, e a funcção ob o radical geral, não podendo annullar-se senão uma unica vez

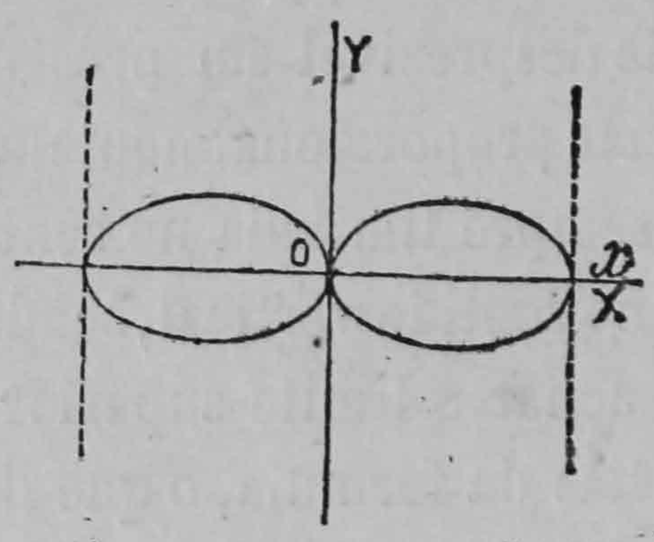
para x positivo, a ordenada será constantemente real desde $x=0$, que dá, com effeito, $y=\pm\sqrt{m^2-d^2}$, até o limite superior de x, conforme a figura 17.

Mas, quando, pelo contrario, m é inferior a d, esta funcção, annullando-se duas vezes de cada lado, só póde ser positiva no intervallo entre x' e x'', de sorte que o lugar, que então cort, quatro vezes o seu eixo horizontal, e não encontra mais o vertical torna-se discontinuo, e compõe-se necessariamente de duas ovaes iguaes e separadas (fig. 18) sem nada presuppor aliás sobre sua fórma precisa. Entre estes dous casos claramente destacados, colloca-se naturalmente a hypothese média $m=d$, que segundo uma regra logica universal, tão importante quanto desconhecida, só deve ser concebida



(*Fig.* 18)

por meio dos dous extremos que ella deve ligar, e sobretudo aqui por meio do segundo, suppondo diminuido gradualmente o excesso de d sobre m; o afastamento das duas ovaes decresce simultaneamente, e, no limite, tornam-se emfim contiguas (fig. 19). Taes são as tres fórmas distinctas que comporta o lugar actual: o centro O da curva acha-se collocado ora dentro, ora fóra, ou emfim sobre sua circumferencia.



(*Fig.* 19)

Nos dous ultimos casos, a consideração do gráo bastaria para demonstrar especialmente que o sentido da curvatura está de accordo com as nossas supposições, sem as quaes o lugar poderia offerecer mais de quatro pontos em linha recta. Porém este motivo tornar-se-hia insufficiente para o primeiro caso, em que o grào não seria incompativel com uma fórma inversa do quarto da curva K L. Ainda que a analogia analytica deva então naturalmente dispôr a estender a dispesição reconhecida para com as duas outras, esta presumpção legitima não poderia dispensar uma rigorosa apreciação. Applicando o methodo geral que facilmente tem-nos sido até aqui de bom exito, confirmaremos a figura supposta, porém com embaraços algebricos

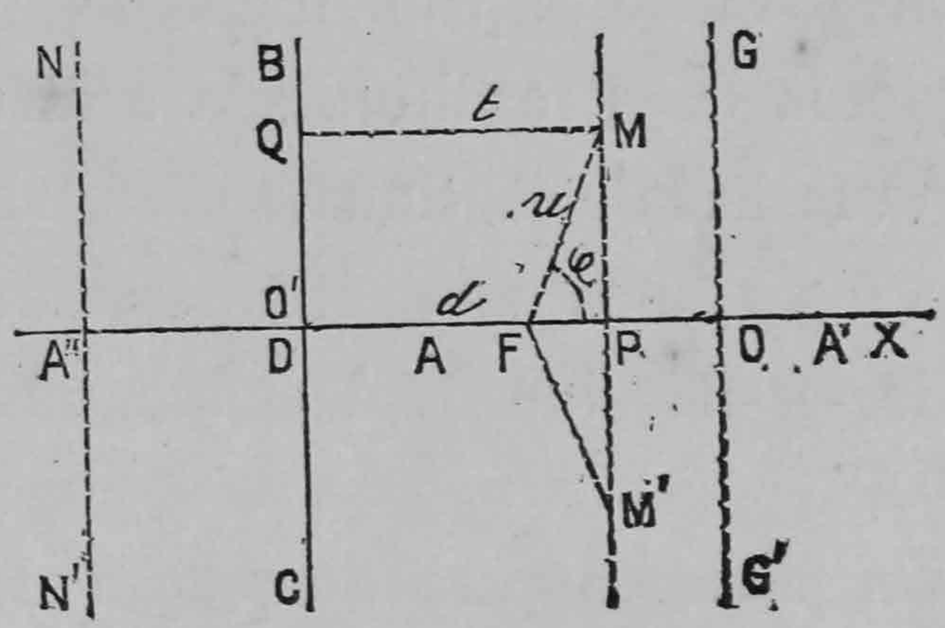
devidos a complicação da equação actual e mui proprios para fazer, já sentir a necessidade de meios mais aperfeiçoados.

Afim de que a imagem destas tres curvas seja, desde este momento tão nitida quanto possivel, creio de meu dever indicar aqui, a respeito dellas, por uma util antecipação, uma propriedade que muito esclarecerá a noção, ainda que a sua demonstração deva ser enviada á geometria a tres dimenções. Consiste ella em considerar essas curvas como as diversas secções planas de um *toro*, superficie facil de conceber, e frequentemente empregada, segundo sua geração por um circulo girando em torno de um eixo exterior. Se o plano secante, contendo a principio o eixo, affasta-se deste parallelamente, determinará, em primeiro lugar, a secção traçada (fig. 18), até que elle venha a tocar a parte interna do toro, o que dará a curva (fig. 19), após o que a secção, tornando-se continua, tomará a fórma indicada (fig. 17). Estas tres curvas poderão portanto ser commodamente qualificadas de *secções toricas*.

201.

23.— 7.º Exemplo. *Equação do lugar de um ponto cujas distancias a um ponto fixo e a uma recta fixa são sempre proporcionaes*. Quando a relação constante n é a unidade, esta definição coincide com a do n. 20, de sorte que a parabola deve aqui constituir um caso particular, sobre o qual seria superfluo insistir.

A equação espontanea $u = nt$, entre as distancias variaveis M F e M Q (fig. 20) indicará a principio, como no n. 20, pela natureza do systema, um logar sempre symetrico em torno da perpendicular FD tirada do ponto fixo F á recta fixa BC.



(Fig 20)

Para attender convenientemente às condiçòes restrictivas, consideremos antecipadamente os valores de t superiopes a d, que correspondem a parallelas taes como $M\,M'$ á direita de F: então a distancia destas ao centro F dos circulos de construcção sendo $t—d$, a condição de intersecção $t - d < u$, já indistinctamente satisfeita, qualquer que seja a grandeza de t, se a relação dada n é igual a unidade, sel-o-ha, com mais forte razão, para $n > 1$. Mas, se n é inferior a 1,.esta desiguadade assignalará, pelo contrario, a t um limitte superior $\frac{d}{1-n}$, que marcará, sobre o eixo do lugar, o ponto A' como o

mais afastado de F e de BC. Neste caso, a curva será pois limitada á direita de F. Entre este ponto e B C, a distancia da parallela ao centro torna-se $d-t$, e a condição de encontro, $d-t < u$, indica para t um limite inferior $\frac{d}{1+n}$, evidentemente commum a todas as hypotheses, e que determinará em A a intersecção necessaria do lugar proposto, qualquer que seja a sua forma, com o seu eixo natural FD. Emfim, do outro lado de B C, a curva, que não poderia penetrar ali se n fosse igual a 1, será ainda mais evidentemente excluida para $n<1$; mas poderá ella estender-se até ahi, e mesmo indefinidamente, no caso de $n>1$, qne, até então confundido com o da parabola, começa assim a distinguir-se claramente. Afim de melhor apreciar esta diversidade, consideremos uma destas ultimas parallelas NN' : sua distancia ao centro dos circulos será expressa por $t+d$, e a condição da intersecção $t+d<u$ imporá a este genero de valores de t, o limitte inferior $\frac{d}{n-1}$ correspondente a um segundo encontro A'' do lugar com o seu eixo, e a partir do qual a curva, interrompida entre A e A'', afastar-se-ha ao infinito.

Segundo o conjuncto desta discussão preliminar, a definição actual comprehende pois, como a precedente, tres curvas claramente distinctas : primeiramente, para $n=1$, a parabola, limitada á esquerda de P e illimitada á direita; ao depois, para $n<1$, uma curva fechada e continua, começando em A e acabando em A'; emfim para $n>1$, uma curva illimitada e descontinua cujas duas partes estender-se-hão indefinidamente, uma á direita de A, outra á esquerda de A''

A passagem para a equação rectilinea não apresenta mais difficuldade aqui do que no n.20. Adoptando, pelos mesmos motivos, os mesmos eixos FD e B C, teremos a equação $y^2+(1-n^2)x^2-2dx+d^2=0$.

Sua discussão apenas faria confirmar a distincção acima estabelecida. Mas, afastando o caso de $n=1$, já examinado, a sua apreciação póde nos offerecer um novo interesse, como exemplo notabilissimo de reconhecimento analytico de uma curva. Com effeito, além de que os casos de $n<1$ e $n>1$ nos indicaram figuras geraes evidentemente analogas ás das curvas do mesmo gráo consideradas no numero 19 sob os nomes de ellipse e de hyperbole, comparação algebrica das equações correspondentes vem constatar a

equivalencia fundamental das definições que as forneceram, máo grado a sua grande diversidade geometrica. Pois, a equação achada no n. 19 sendo escripta sob a fórma

$$y^2 + \left(1 - \frac{d'^2}{m^2}\right) x^2 = \frac{1}{4}\left(m^2 - d'^2\right),$$

sua confontracção com a precedente mostra que ellas não differem essencialmente a não ser pela presença nesta ultima de um termo do primeiro gráo em x que falta á outra. Ora, como sabemos, em principio, que a equação de uma linha póde mudar em consequencia de seu simples deslocamento, sem nenhuma variação de fórma ou de grandeza, resta a decidir se uma tal diversidade algebrica não proveria unicamente de uma differença de situação dos eixos em relação á curva commum. Esta differença não poderia applicar-se ao eixo dos x, em torno do qual o logar é, nos dous casos, igualmente symetrico: mas o outro eixo não apresenta a mesma paridade; pois que, a symetria que existe tambem em torno delle em virtude da segunda equação é certamente incompativel com a primeira. E' preciso, pois, examinar finalmente se esta não poderia perder o seu termo distinctivo $-2\,dx$ deslocando convenientemente a origem ao longo de F D. Semelhante deslocamento equivalerá algebricamente a mudar x em $x' + h$, se h designa o adiantamento indeterminado da origem actual D no sentido D A'. Operando esta transformação, é facil vêr que os dous termos do primeiro gráo em x' destruir-se-hão mutuamente, uma vez que se tome

$h = \frac{d}{1 - n^2}$, o que colloca esta nova origem á direita ou á esquerda

de BC, conforme n seja inferior ou superior a 1, em O ou O' sempre no meio de A A' ou de A A''. A equação assim modificada

$$y^2 + (1 - n^2)\, x'^2 = \frac{n^2 d^2}{1 - n^2},$$

torna-se rigorosamente semelhavel á do n. 19, como tendo evidentemente a mesma fórma, e offerecendo além disto uma equivalente generalidade, pois que, contém ella igual numero de constantes arbitrarias. Não se póde, pois, mais duvidar da identidade dos lugares, e, acabando o confronto algebrico, de modo a passar indifferentemente de um systema de constantes a outro, estabelecer-se-ha, entre estas duas definições, uma exacta transição mutua, quer se tome

$$n = \frac{d'}{m} \quad \text{e} \quad d = \frac{m^2 - d'^2}{2d'},$$

ou, em sentido inverso,

$$m = \frac{2dn}{1 - n^2} \quad \text{e} \quad d' = \frac{2n^2 d}{1 - n^2}.$$

O modo de distincção entre a ellypse e hyperbole que, no n. 19, consistia em $m > d'$ ou $m < d'$, é aqui mantido, debaixo de uma fórma evidentemente equivalente, suppondo $n < 1$ ou $n > 1$.

Para utilisar tanto quanto possivel esta approximação notavel, convém proseguil-a, em particular, até decidir se o ponto fixo da definição actual coincide com um dos relativos á antiga. Ora, basta, neste intuito, referil-os todos a uma origem que deva ser necessariamente commum aos dous systemas, tal como o centro O, onde se cruzam os eixos geometricos do lugar, rectas cuja identidade não poderia ser duvidosa. A difficuldade reduz-se, pois, a comparar OF ou $h - d$ com $\frac{1}{2} d'$; o que demonstra plenamente a coincidencia das duas sortes de pontos fixos. Desde então, a duplicidade propria ao do n. 19 acha-se dever tambem convir ao ponto actual, e, por conseguinte, a recta correspondente, como o indicava aliás a symetria do lugar em torno do segundo eixo GG' tirado pelo centro O.

Este exemplo de comparação algebrica entre duas definições tem mais importancia do que o do n. 21 relativo ao circulo, quer pela difficuldade muito maior de apprehender geometricamente a equivalencia das duas gerações, quer em virtude da modificação algebrica que foi preciso fazer soffrer a uma das equações antes de assemelhal-as, segundo uma marcha que será em breve systematisada.

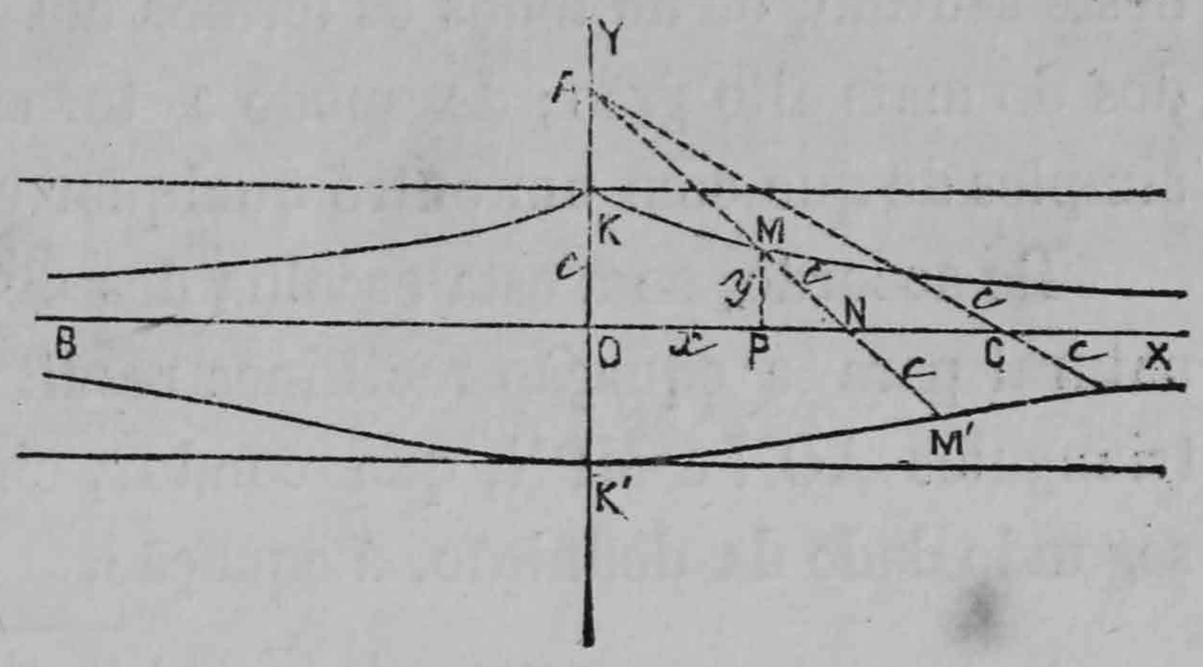
A natureza, semi-rectilinea, semi-polar, do systema de coordenadas inherente a esta definição, torna a passagem para a equação polar tão facil como a formação da equação rectilinea. Como é util conhecer esta equação polar das tres secções conicas, creio do meu dever deduzil-a aqui da equação natural $u = nt$, collocando o polo no ponto fixo F e contando os angulos a partir de FA'. Uma das coordenadas primitivas u é então conservada quanto á outra

basta concebel-a em DP para reconhecer logo que ella equivale a $d + u\ cos\ \varphi$; o que conduz finalmente á equação polar

$$u = \frac{nd}{1 - n cos\ \varphi}.$$

Ella indicará um lugar illimitado ou fechado, conforme o valor de u poder ou não tornar-se infinito, o que exige $\cos\varphi = \frac{1}{n}$; hypothese inadmissivel para $n < 1$, mas aceitavel em qualquer outro caso, conforme a distincção já estabelecida.

24.— 8.º EXEMPLO. *Equação da conchoide.* Chama-se assim, desde os Gregos, o lugar de um ponto cuja distancia a uma recta fixa BC fica constante, estimando-a segundo raios convergentes para um ponto fixo A (Fig. 21). Sua equação natural é pois MN ou $\gamma = c$. Indica a principio que a curva é evidentemente symetrica em torno da perpendicular KK' tirada do ponto fixo á recta fixa. Vemos ao depois que a mais curta distancia MP do ponto descrevente M ou M' á recta BC deverá incessantemente diminuir, em virtude da invariabilidade da hypothenusa MN, á medida que o angulo N tornar-se mais agudo, e proporcional-



(*Fig*, 21.)

mente a seu seno, que equivaleria sempre a MP, si a constante c fosse tomada para raio trigonometrico. Assim, de um lado, o maximo de MP devendo achar-se em KK' sobre o eixo AO, os dous ramos, superior e inferior, da curva ficarão constantemente encerrados entre as horizontaes correspondentes. De outro lado, e aqui está a mais notavel singularidade de uma tal definição, cada um destes ramos, em seu curso horizontal indefinido, approximar-se-ha continuamente de BC, a tal gráo que se quizer, mas sem nunca poder entretanto attingil-a, pois MP não poderia annullar-se rigorosamente, por mais agudo que se torne o angulo N; de sorte que não se poderá suppor que BC encontre a curva a não ser no infinito. Esta nova relação geometrica, segundo a qual a recta é ordinariamente qualificada de *assymptota* da curva, fornecer-nos-ha immediatamente o assumpto de uma importante theoria geral, como muito propria a melhor caracterisar a fórma das linhas que disto se

susceptiveis. Sente-se, com effeito, desde este momento, que toda a curva deve acabar por ser convexa para a sua assymptota, sem o que ella cortal-a-hia necessariamente.

Esta discussão preliminar indica logo os eixos rectangulares como os mais favoraveis á simplificação da equação rectilinea. Um motivo de symetria, cuja apreciação algebrica nos é jà familiar, conduz a principio a tomar AKK' para um dos eíxos. Quanto ao outro, o assymptotismo de BC não poderia permittir hesitação alguma. Sem duvida, a influencia algebrica desta nova relação geometrica não é nem tão facil de prever nem mesmo tão consideravel como a da primeira. Mas concebe-se todavia, salvo a melhor precisar ulteriormente semelhante resumo, que, tomando esta assymptota BC para eixo dos x, a equação, devendo assim dar $x=\infty$ para $y=o$, deverá carecer, neste sentido, ou de todos os termos em x sómente, ou, pelo menos, dos do mais alto gráo; de modo a tornar-se necessariamente mais simples do que com um outro qualquer eixo.

De accordo, com esta escolha dos eixos, a passagem da equação natural para a equação rectilinea resulta logo da comparação dos triangulos AON e MPN, que conduz, chamando d a distancia AO, segundo dado da definição, á equação,

$$xy=\pm(d-y)\sqrt{c^2-y^2},$$

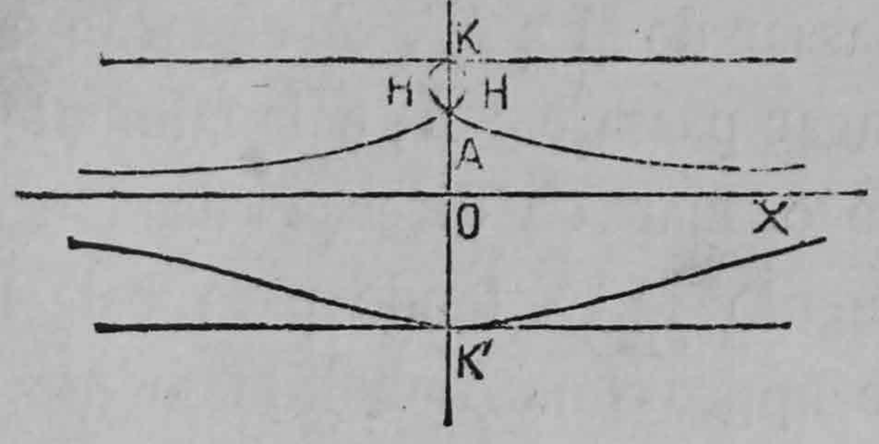
que pela suppresão do radical seria elevada ao quarto gráo. Vê-se que, segundo nossas duplas previsões, x não entra alli com potencias impares nem separado de y. Desembaraçando x, sob a fórma.

$$x=\pm\left(\frac{d}{y}-1\right)\sqrt{c^2-y^2},$$

acha-se de novo immediatamente os limites verticaes da curva, seu curso horizontal indefinido, e seu assymptotismo para com o eixo dos x. O unico documento novo que nos offerece esta equação resulta de que o valer de x, já annullado para $y=\pm c$, póde sel-o tambem para $y=d$, qnalquer que seja c; o que indica o ponto A como pertencendo ao lugar. Na figura actual, em que d excede a c, este ponto acha-se isolado do resto da curva, visto como os valores de y intermediarios entre c e d não são admissiveis: é um accidente geometrico que só tem realmente de estranho a sua novidade, e que póde aliás ser facilmente concebido, quer algebrica quer mesmo graphicamente. Quando, pelo contrario, d é inferior á c, estas ordenadas de c a d dão abcissas reaes, a principio crescentes, depois descrescentes, em quanto nullas nas duas extremidades deste inter-

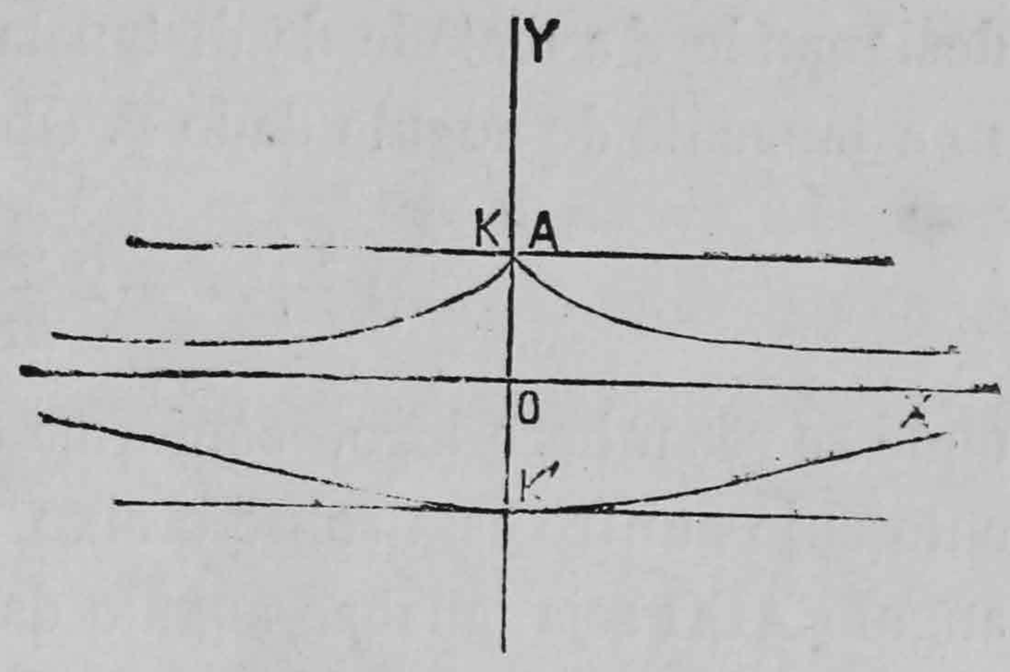
vallo: a parte superior da curva é pois modificada, e toma então a fórma indicada (fig. 22), não experimentando a outra parte além disso nenhuma grave mudança.

Emfim, se $d=c$ esta porção fechada addicional AHKA', após um retrahimento continuo, apagar-se-ha totalmente, conforme a (fig 23). E' assim que a equação rectilinea desvenda espontaneamente uma distincção necessaria, que a definição primitiva era pouco propria a indicar. Existe pois, na realidad, tres sortes de conchoides, como tres sortes de secções toricas e de secções conicas.



(*fig.* 22)

Ainda que esta equação devesse suscitar muitos embaraços algebricos ao unico methodo geral que conheciamos já para determinar analyticamente o sentido da curvatura, o leitor poderá constatar facilmente, a este respeito, a exactidão das supposições aqui figuradas, por meio de uma sufficiente combinação da definição, e sobretudo do assymptotismo della derivado, com a consideração do gráo obtido: será mesmo facil determinar especialmente, em cada um dos tres casos, a verdadeira direcção da tangente em K assim como em K' o que acabará de dissipar, a; este respeito, toda incerteza.

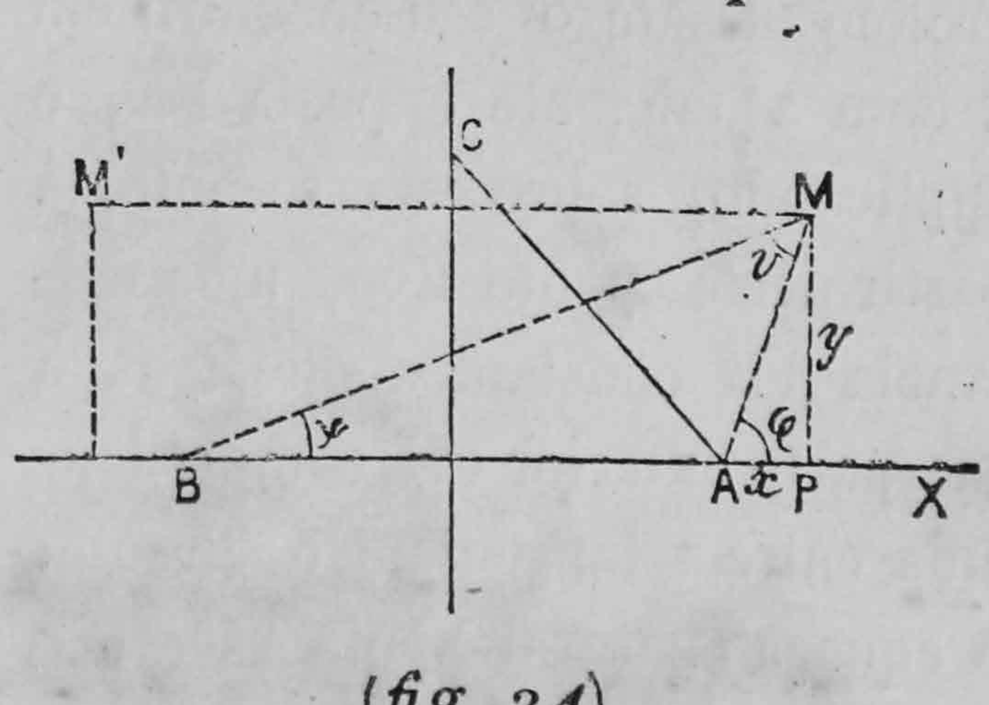


(*fig.* 23)

25.—9ᵉ. Exemplo. *Equação do logar do vertice de um angulo invariavel, cada lado do qual passa sempre por um ponto fixo.*

A equação natural é aqui $\varphi - \psi = \nu$, entre as inclinações variaveis dos dous lados do angulo dado ν sobre a recta que une os dous pontos fixos A e B (fig. 24).

Ella indica immediatamente um logar limitado, visto como, as duas coordenadas angulares nunca podendo dest'arte tornar-se iguaes, as duas rectas moveis não serão, em caso algum, paral-



(*fig.* 24)

lelas, e portanto o ponto descrevente M não poderá afastar-se indefinidamente de AB. A curva além disto deve ser symètrica em torno da perpendicular CK tirava ao meio de AB; pois a equação não muda substituindo a cada inclinação o supplemento da outra, de modo a passar de M a M'. A equação sendo satisfeita por $\psi = 0$ e $\varphi = \nu$, o lugar passa em A, e igualmente em B: é facil sentir que este valor de φ marca a direcção da tangente correspondente; visto como o angulo MAX tende para este limite ν, a medida que o ponto M se approxima indefinidamente do ponto A, conforme a definição geral das tangentes.

Para passar á equação rectilinea, por meio dos eixos AB e CK, espontaneamente indicados por esta discussão previa, convém pôr a principio a equação natural sob a forma trigonometrica, sobretudo tomando as tangentes dos dous membros, o que dá

$$\frac{tang\ \varphi - tang\ \psi}{1 + tang\ \psi\ tang\ \varphi} = m.$$

Desde então, os triangulos rectangulos MAP e MBP conduzem facilmente a exprimir estas duas tangentes por $\frac{y}{x-d}$ e $\frac{y}{x+d}$, designando d a metade da distancia dos dous pontos fixos A e B, e m a tangente do angulo dado ν. Obtem-se assim a equação rectilinea

$$y^2 + x^2 - 2\frac{d}{m}y - d^2 = 0,$$

onde se reconhece logo, conforme a indicação geometrica, um circulo cujo centro está sobre o eixo dos y, em um ponto C tal que o angulo ACO seja igual ao angulo dado, sendo aliás o raio igual a CA.

26.— 10.º EXEMPLO. *Equação da cissoide.* Chama-se assim desde os Gregos, uma curva derivada do circulo, irando-se, de um ponto fixo A (fig. 25) da circumferencia, uma secante qualquer, prolongada até o seu encontro em C com a tangente opposta BK, e applicando, sobre esta secante, a partir deste ponto fixo, uma distancia AM constantemente igual a sua parte exterior CN, comprehendida entre a tangente e o circulo. A equação natural é pois AM = CN,

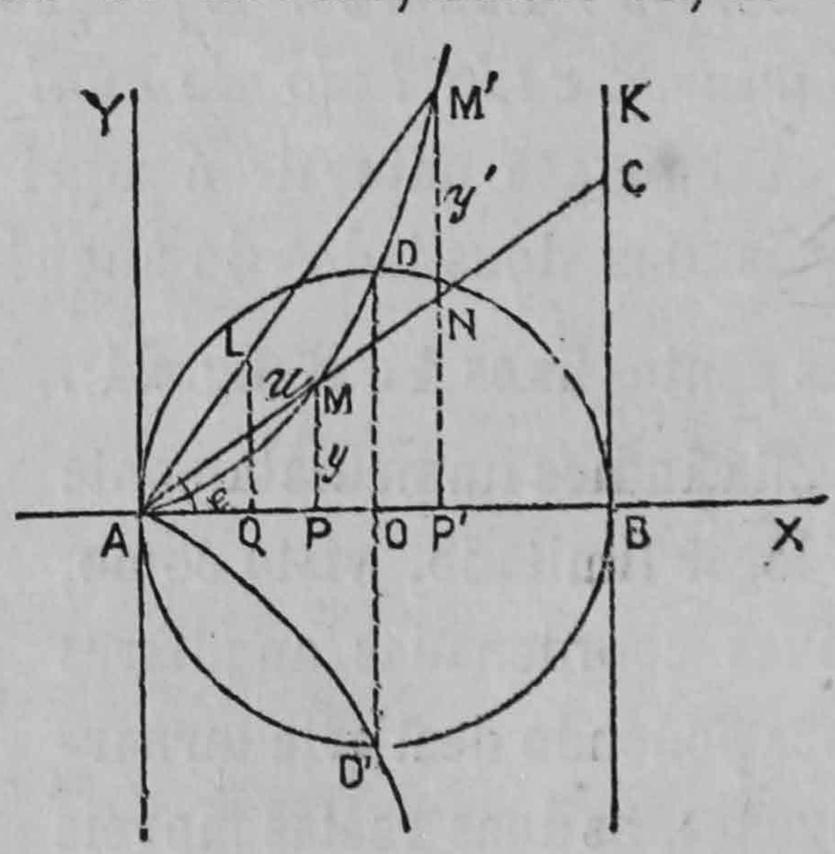


Fig. 25)

entre estes dous comprimentos variaveis. Ella indica a principio um lugar evidentemente symetrico em torno de AB. Demais, a curva começa em A, onde o sua tangente é necessariamente AB, limite irrecusavel da direcção MA, á medida que o ponto descrevente M se aproxima de A. Interior a principio ao circulo dado, ella cortal-o-ha defronte do seu centro, em D e D', e desembaraçar-se-ha depois cada vez mais quando o angulo variavel MAB exceder a 45.° Mas, afastando-se do circulo, approximar-se-ha continuamente da tangente BK, de accordo com a equação MC=AN, que indica a distancia obliqna MC, e com mais forte razão a distancia perpendicular MH,como podendo diminuir tanto quanto se quizer, sem todavia tornar-se jámais rigorosamente nulla. A recta BK é pois uma assymptota da curva, que allás não poderia excedel-a. Esta discussão conduz evidentemente á forma traçada sobre a figura, salvo as probabilidades usuaes de sinuosidade entre o polo A e a assymptota BK.

A passagem da equação natural para a rectilinea, apresenta neste exemplo, uma circumstancia nova, que importa observar, de accordo com a utilidade notavel que se achará em introduzir, como intermediaria, a equação polar em torno do ponto A, que resulta quasi immediatamente da primeira, e que conduz igualmente o segunda. Primeiro, uma das coordenadas naturaes MA, é precisamente o raio vector u do ponto M; quanto á outra, NC, constitue, relativamente ao angulo φ, uma sorte de linha trigonometrica desusada, igual ao excesso de sua secante AC sobre seu coseno AN. tendo em vista o angulo recto ANB,e tomando AB para raio trigonometrico. Forma-se assim a equação polar

$$u=\frac{2r}{cos\varphi}-2r\ cos\varphi=2r\ \frac{sen^2\varphi}{cos\varphi},$$

em que r designa o raio do circulo dado. Desde então a passagem para a equação rectilinea far-se-ha sem difficuldade, por meio do triangulo AMP, relativamente aos eixos, já motivados, AB e AY. Esta equação será finalmente

$$y^2=\frac{x^3}{2r-x}.$$

E' facil achar de novo as indicações geometricas já obtidas Quanto ao sentido da curvatura, ainda indeciso para as partes medias, bastaria o gráo da equação para confirmar sufficientemente a

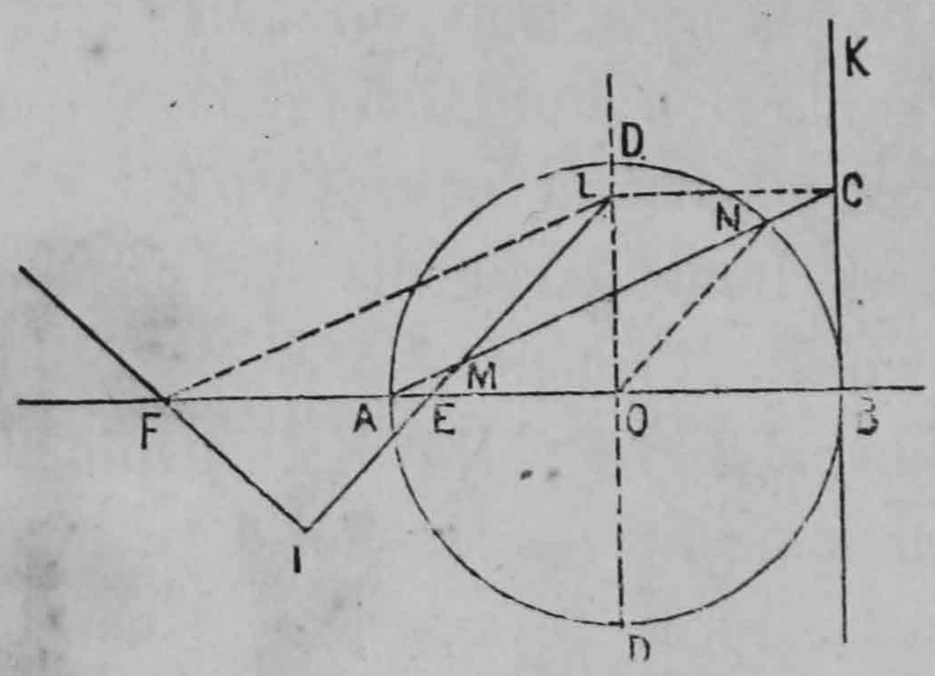
nossa hypothese, indicando a ausencia de toda inflexão, afim de que a curva nunca possa offerecer mais de tres pontos em linha recta.

Mas, alem disto, pode-se aqui applicar facilmente o methodo geral empregado até agora, considerando a corda indeterminada AM', cuja extremidade tem uma abscissa arbitraria x'. A ordenada LQ ou z desta corda, deduzida da comparação dos triangulos ALQ e AM'P', será expressa por $x\sqrt{\frac{x'}{2r-x'}}$, de sorte que

$$y : z :: \sqrt{\frac{x}{2r-x}} : \sqrt{\frac{x'}{2r-x'}},$$

donde resulta, de accordo com a forma supposta, que y será menor do que z, emquanto x ficar inferior á x'.

A esta definição primitiva da cissoide, convém juntar aqui, segundo Newton, uma geração notavel por um movimento continuo. Consiste, após haver prolongado o diametro AB (fig. 26) de uma extensão AF igual ao raio, em fazer mover um angulo recto, um de cujos lados é igual AB, de tal modo que, seu lado indefinido passando sempre em F, a extremidade L de seu lado definido IL deva descrever a perpendicular DOD': então o



(*Fig.* 26)

meio M deste lado descreve necessariamente a cissoide. Pois, a igualdade dos triangulos rectangulos FLI e FLO, em que, por construcção, FO=IL, dá FI=LO, o que conduz a reconhecer a igualdade dos triangulos FEI e LEO, donde resulta FE= LE, e, portanto, AE=EM, visto como AF e ML são ambos iguaes ao raio do circulo. Desde então, a recta AM, tornando-se parallela a FL, os triangulos ACB e FLO serão iguaes, donde BC= OL, e, portanto, LC igual e parallela a OB ou AO. Reconhece-se assim a igualdade constante dos triangulos isoceles AON e CLM, e, por consequencia, dos comprimentos AN e CM, o que equivale a AM=CN, caracter primordial da cissoide.

Esta segunda definição poderia fornecer util exercicio de geometria analytica, que recommendo aos principiantes, quando esti-

verem assás adiantados para sobrepujar as difficuldades que offerece a reproducção directa da equação rectilinea o que tornar-se-ha sufficientemente possivel desde o fim do capitulo seguinte.

27.— Seria agora superfluo prolongar mais a serie de exemplos preliminares que julguei indispensavel para tornar já convenientemente familiar a concepção fundamental da geometria analytica. Toda a continuação de nosso estudo offerecerá alem disto muitas occasiões naturaes de indicar outros cada vez mais difficeis. Demais, o leitor pode aqui multiplical-os espontaneamente, com tanto menos embaraço quanto a mór parte das definições acima consideradas podem suggerir facilmente novas; é assim, por exemplo que as da conchoide e da cissoide poderiam ser facilmente generalisadas substituindo, quanto a uma á linha recta, quanto á outra, ao circulo, a curva que se quizer. Creio sómente de meu dever ainda assignalar aqui, mas sem exame, algumas definições proprias a fornecer uteis exercicios.

Deve-se sobretudo notar a dupla serie de curvas que Descartes tirou do circulo. Umas, fechadas, formam-se a principio projectando sobre um raio qualquer a projecção de sua extremidade sobre um diametro fixo; redobrando a mesma construcção para com a curva assim obtida deduz-se uma nova, e assim por diante infinitamente. Quanto ás outras, que são illimitadas, forma-se a primeira tomando, sobre cada raio, o ponto cuja projecção sobre o diametro fixo pertence á perpendicular tirada a este raio de sua extremidade; cada uma das outras curvas desta serie deduz-se da precedente segundo o mesmo modo graphico, indefinidamente applicavel. Estas duas series de linhas fornecem exemplos interessantes de equações rectilineas de todos os gráos pares, umas simplesmente, outras duplamente. Substituindo ao circulo primitivo uma curva qualquer, poder-se-ha apprehender, em geral, o modo analytico invariavel, segundo o qual sua equação polar produzirá as das duas series correspondentes: a subordinação das equações rectilineas resultará facilmente.

Assignalarei ainda o lugar dos pontos cuja somma dos quadrados das distancias a diversos pontos fixos do plano fica constante. O leitor facilmente reconhecerá um circulo cujo centro coincide com o centro de gravidade do systema dos pontos dados, supposto todos do mesmo peso.

Enfim, indicarei, a mais simples especie *de epicycloide* plana, isto é, o lugar de um ponto da circumferencia de um circulo inva riavel que róla sobre um circulo fixo, de igual raio, e que, ao mesmo tempo, gyra em torno de seu centro com uma igual velocidade. Segundo os dous movimentos são contrarios ou conformes, o lugar é ou um circulo fa cil de verificar, ou uma curva notavel do quarto gráo.

Esta equação formar-se-ha facilmente introduzindo como variavel auxiliar, a direcção da linha dos centros. Poder-se-ha averiguar assim, sem tratar formalmente o caso geral, muito complicado, em que os dous circulos seriam desiguaes, que o gráo da equação dependeria da relação dos raios dos referidos circulos.

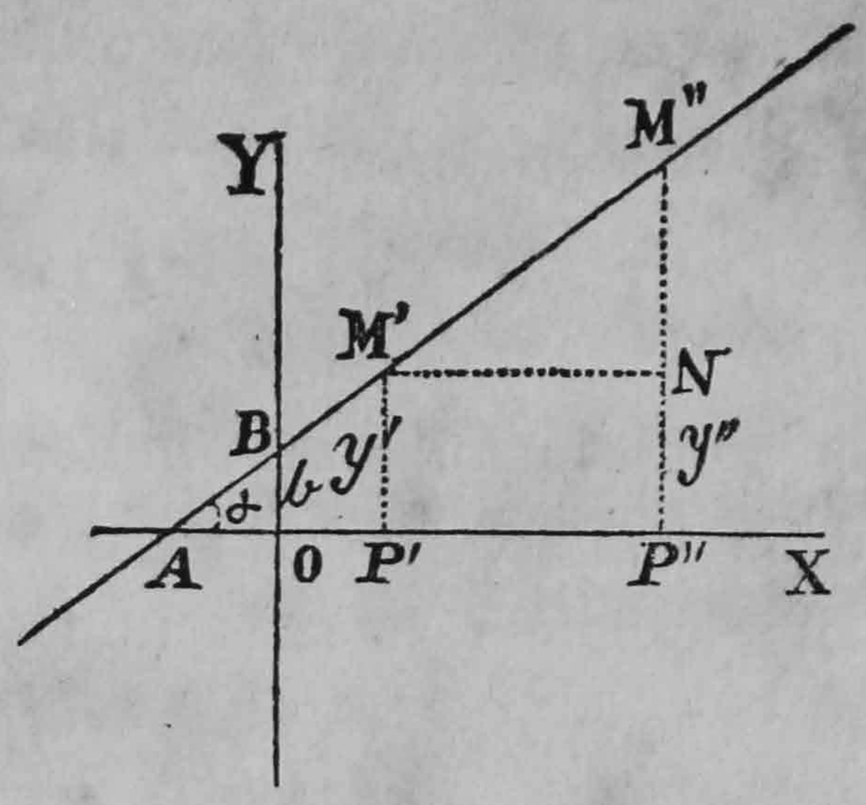
CAPITULO III

THEORIAS PRELIMINARES RELATIVAS: 1º Á LINHA RECTA; 2º Á TRANSPOSIÇÃO DOS EIXOS

28. Para completar esta indispensavel introducção, ao conjuncto da geometria analytica, não nos resta mais do que expôr duas theorias preliminares extremamente usuaes, sem as quaes a explicação dos methodos geraes que devem constituir o nosso principal objecto achar-se-hia frequentemente interrompid a por considerações incidentes, cuja reproducção superflua tornar-se-hia logo tão incommoda quão fastidiosa.

Theoria analytica da linha recta. — Consiste essencialmente em achar os dous coefficientes, linear e angular, proprios á equação de cada recta, quando, em lugar de ser immediatamente dados, devem resultar de qualquer outro modo elementar relativo á determinação da recta procurada, por meio das condições puramente rectilineas. Judiciosamente reduzida ao que é concernente ao seu verdadeiro destino para o complexo da geometria analytica, esta theoria preliminar compõe-se unicamente de trez questões essenciaes, cujas combinações poderão multiplicar-se muito, mais sem offerecer quasi nunca utilidade alguma real.

1.° *Equação de uma recta passando por dous pontos dados.*— Especialmente encarada, esta questão constitue, no fundo, apenas um simples problema de trigonometria, em que se trata, por meio as distancias de dous pontos M' e M'' (fig. 27) aos dous eixos O X e O Y, de obter o angulo α formado com OX pela recta que os une, e a distancia b em que ella corta O Y. Limitando-nos, para caracterisar uma tal solução, a considerar aqui o coefficiente angular, que representa tangα, se os eixos são rectangulares, o triangulo M'M''N exprimil-o-ha logo por $\frac{y''-y'}{x''-x'}$; formula que convém igualmente ao caso dos eixos obliquos, considerando a significação trigonometrica que toma então este coefficiente.



(*Fig. 27*)

Porém sem insistir mais sobre este modo especial, é mister sobretudo encarar a questão proposta como um simples caso particular do problema geral que consiste em fazer passar uma linha de especie determinada por um numero sufficiente de pontos dados. Posto que esta investigação não deva ainda ser formalmente examinada, convém todavia sentir já que a marcha analytica que vai agora completal-a para com a linha recta sómente, comportaria necessariamente a mesma efficacia se, em lugar applical-a á equação $y = ax + b$, considerassemos outra qualquer equação geral.

Este principio evidente consiste em que, quando uma linha passa por um ponto dado as constantes arbitraria de sua equação devem satisfazer a relação fornecida pela substituição das coordenadas proprias a esse ponto. Assim, a condição relativa ao ponto M' sujeitaria já as constantes desconhecidas a e b á relação

$$y' = ax' + b,$$

que, insufficiente para determinal-as, permitte subordinal-as uma a outra. Refere-se commumente o coefficiente linear ao coefficiente angular, o unico arbitrario na equação da recta, que torna-se então

$$y - y' = a(x - x'),$$

formula mui usual, e expresiva, que importa reter na memoria. Considerando agora o segundo ponto M'', teremos, entre a e b, uma segunda relação $y'' = ax'' + b$, que, combinada com a precedente,

determinal-as-ha completamente, segundo a natureza geometrica do problema. Acha-se assim $a = \frac{y''-y'}{x''-x'}$. O coefficiente angular de uma recta passando por dous pontos dados é pois igual á relação entre a differença de suas ordenadas e a de suas abscissas, conforme a solução trigonometrica. Resulta a equação

$$y-y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x'),$$

cuja unica composição indica claramente a passagem da recta pelos dous pontos. No caso particular em que estes dous pontos fossem simplesmente as suas intersecção com os dous eixos, ter-se-hia, por exemplo, $x' = \alpha, y' = 0$, e $x'' = 0, y'' = \beta$; a equação tomaria a forma

$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} = 1,$$

que póde ser util ter em consideração.

Sendo evidentemente superfluo um terceiro ponto, a sua introducção faria nascer uma relação condicional entre as suas coordenadas x''', y''', e as dos dous primeiros, afim de que a equação determinada por meio destes possa tambem convir-lhe. Ter-se-hia assim, para cada novo ponto, a condição analytica

$$\frac{y'''-y'}{x'''-x'} = \frac{y''-y'}{x''-x'}$$

ou, em linguagem vulgar, para que muitos pontos estejão em linha recta é mister que as differenças de sua ordenadas sejão proporcionaes ás de suas abscissas.

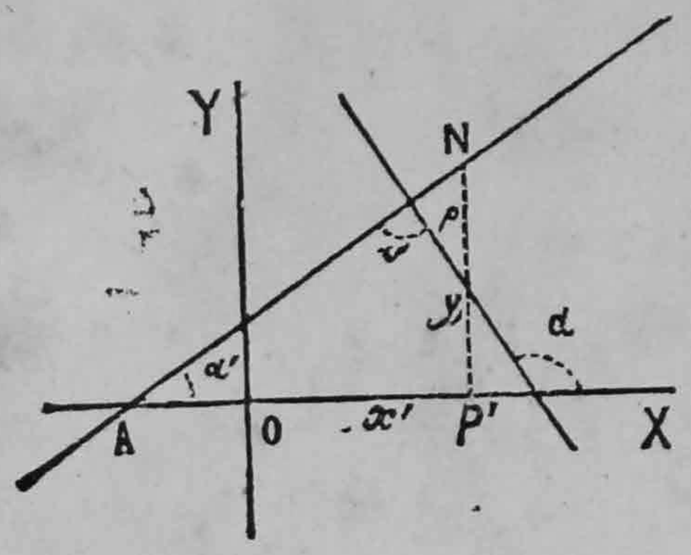
2° *Angulo de duas rectas, segundo suas equações.* — Como esta segunda questão é, por sua natureza, particular a linha recta, não poderia comportar solução alguma verdadeiramente analytica, comparavel a precedente. Não vendo ahi portanto mais do que um simples problema de trigonometria póde-se a principio resolvel-o facilmente no caso dos eixos rectangulares, unico usual, em virtude deste principio evidente: que o angulo de duas rectas equivale á differença de suas inclinações sobre uma linha commum. Então, com effeito, os coefficientes angulares proprios ás duas equações dadas,

$$y = ax + b,\ y = a'x + b',$$

representando as tangentes dos angulos α e α' (fig. 28), esta relação geral $\nu = \alpha - \alpha'$, dá logo

$$\text{tang. } \nu = \frac{a - a'}{1 + a\,a'}$$

Se as duas rectas devem ser rectangulares, tang ν deverá tornar-se infinita, o que exige a relação mu usual $a\,a' + 1 = 0$, donde $a' = -\frac{1}{a}$:



(*Fig.* 28)

desorte que, neste caso, os dous coefficientes angulares são reciprocos e de signal contrario ; de conformidade com a evidente indicação especial da figura, em que um dos angulos torna-se assim o supplemento do complemento do outro.

Com eixos obliquos, não teriamos mais tang$\alpha = a$, porém

$$\text{tang } \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{1 + a \cos \theta}$$ ($n.^{o}$ 17), e o resultado tomaria a forma mais complicada

$$\text{tang } \nu = \frac{(a' - a) \operatorname{sen} \theta}{1 + a\,a' + (a + a') \cos \theta},$$

da qual não convem sobrecarregar a memoria,como não offerecendo utilidade real alguma.

3º *Intersecção de duas rectas dadas*. Consistindo este poblema em achar, por intermedio das constantes proprias ás equações de duas rectas dadas,

$$y = ax + b \quad , \quad y = a'x + b',$$

as coordenadas de seu ponto commum, póde-se certamente consideral-o como uma questão trigonometrica, relativa á resolução da figura rectilinea que resulta da reunião espontanea das diversas grandezas conhecidas. Mas, além deste caminho especial, que basta indicar aqui, esta terceira questão comporta evidentemente, como a primeira, inteira generalisação para com linhas quaesquer, e é sómente assim que a indagação torna-se verdadeiramente analytica. As coordenadas dos pontos de intersecção distinguindo-se algebricamente das dos pontos particulares de cada lugar por sua aptidão

exclusiva a vereficar simultaneamente as duas equações, sua determinação resulta pois, em geral, da operação analytica que assignala soluções communs a estas equações simultaneas. No caso actual te trabalho algebriço não apresenta difficuldade alguma e fornece

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \ , \quad y = \frac{ab' - ba'}{a - a'} \ ,$$

para as coordenadas do ponto procurado. Mas, em lugar de reter estas formulas, será mais commodo ordinariamente reproduzir o equivalente em relação a cada systema de rectas: só o principio é importante. Concebe-se, além disto, que esta operação conduzirá a formular a condição analytica do concurso de tres rectas em um mesmo ponto, visto como será mister então exprimir que as cordenadas de um ponto de intersecção de duas de entre ellas convenham á terceira.

Taes são os elementos essenciaes que é necessario admittir na theoria analytica da linha recta, commummente sobrecarregada de questões superfluas, que só offerecem uma combinação, raramente util, destes tres problemas fundamentaes. Ajuntarei sómente uma das questões compostas, que, quer como typo, quer em razão da sua utilidade ulterior, merece cuidadosa apreciação.

4º *Distançia de um ponto dado a uma recta dada.* Esta determinação exige evidentemente que se forme a equação da perpendicular indefenida tirada do ponto M', (fig. 28), cujas coordenadas são x', y', á recta N A, tendo por equação $y = ax + b$, e que se deduzam as coordenadas de sua intersecção K. A formula das distancias conduzirá desde então á expressão do comprimento procurado M' K ou p. De accordo com a primeira das tres questões elementares, a equação da recta M'K, passando por M', é

$$y - y' = a'(x - x').$$

Sendo ella perpendicular á recta dada, tem-se, conforme o segundo porblema, $a' = -\frac{1}{a}$. Se desde então, conforme a terceira questão, calcula-se, sem nenhum vão artificio algebrico, as coordenadas do ponto de encontro N, deduzir-se-ha finalmente, para a distancia procurada, a formula.

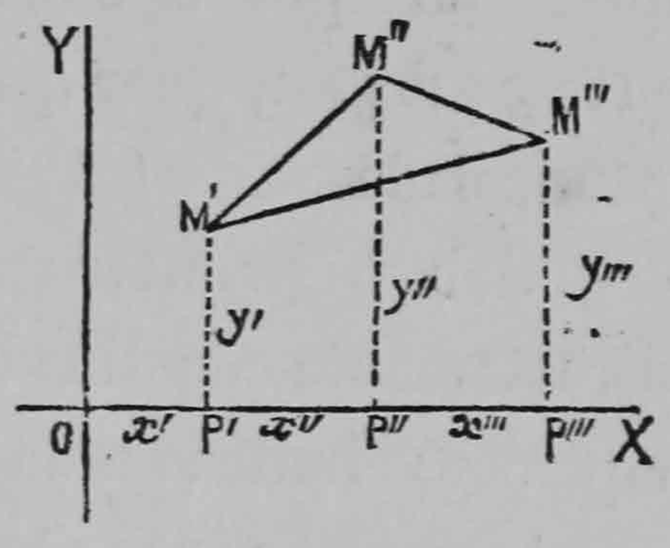
$$p = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

A solução trigonometrica conduzirá a ella directamente com facilidade, por meio do triangulo rectangulo NKM', em que o angulo N é igual áquelle cuja tangente é a ; pois a hypotenusa deste triangulo póde ser considerada como a differença entre a ordenada y' do ponto dado e a ordenada correspondente $ax'+b$ da recta proposta.

Além desta questão composta, a unica que importa mencionar, o leitor póde exercitar-se utilmente sobre algumas outras combinações mais ou menos complexas. Citarei sobretudo a formula notavel que exprime a aria de um triangulo por meio das coordenadas rectilineas de seus vertices. Partindo da regra geometrica ordinaria, poder-se-ha deduzir destas coordenadas por calculos pouco complicados se os eixos são rectangulares, a base e a altura do triangulo' donde resultará finalmente

$$2S = (y'x''-x'y'')+(y''x'''-x''y''')-(y'x'''-x'y''')\,,$$

conforme a indicação geometrica directa, concebendo o triangulo M'M''M''' (fig. 29) como a somma dos dous trapezios M'P'M''P'' e M''P''M'''P''' diminuida do trapezio M'P'M'''P'''.



(*Fig. 29*)

Os principiantes poderão tambem exercitar-se, com alguma utilidade, sobre a theoria analytica da linha recta, verificando algebricamente varios theoremas, já vulgares geometricamente, sobre as convergencias das tres rectas que podem resultar dos tres lados de um triangulo de diversas maneiras: 1º como perpendiculares tiradas dos vertices oppostos; 2º como unindo seus meios a estes vertices; 3º como suas perpendiculares nestes meios; 4º emfim, como bissectrizes dos tres angulos. Todo o merito destes exercicios elementares consistirá na feliz escolha dos eixos, que simplificará muitos calculos de outro modo fastidiosos. De resto, após haver calculado, em relação a eixos communs, as cordenadas, em geral mui distinctas, destas quatro intersecções, poderemos completar esta operação reconhecendo assim que tres dentre ellas estão sempre em linha recta; proposição geometrica cuja demonstração directa seria incommoda e aliás é muito ociosa.

29.— *Theoria da transposição dos eixos.*— Esta segunda theoria preliminar,' mais importante do que a precedente, tem por objecto proprio determinar as modificações que comporta a equa-

ção rectilinea de uma figura qualquer em consequencia da mudança dos eixos correspondentes. Basta, para este effeito, exprimir, em geral, as coordenadas de um ponto arbitrario relativamente aos antigos eixos, por meio de suas coordenadas em relação aos novos. A substituição ulterior destas formulas invariaveis em cada equação considerada, especificará a influencia analytica de semelhante transposição, que, em si mesma, refere-se a um ponto isolado, qualquer que seja a linha a que possa ao depois pertencer. Ora, o estabelecimento destas formulas não constitue directamente senão um simples problema trigonometrico, cuja solução não offerece difficuldade alguma essencial. Mas, antes de nos occuparmos com isso, importa caracterisar distinctamente o duplo destino geral desta theoria indispensavel, mui imperfeitamente apreciada de ordinarios. E' preciso, para isso, considerar separadamente suas duas relações necessarias com a concepção fundamental da geometria analytica, quer no que é concernente á comparação das linhas segundo suas equações, quer quanto á simplificação algebrica de cada equação isolada.

Sob o primeiro aspecto, a theoria da transposição dos eixos é directamente destinada a decidir se a diversidade actual de duas equações indica uma verdadeira distincção entre as linhas correspondentes, ou se sómente refere-se a uma simples differença de situação ; o que deve radicalmente dissipar uma fonte frequente de confusão que temos reconhecido, desde a origem, como naturalmente inherente a nosso systema de geometria analytica, em que as idéas de posição são as unicas immediatamente exprimiveis. Pois que, fazendo experimentar a um dos dous lugares comparados uma transposição de eixos indeterminada, reunir-se-ha, n'um mesmo typo algebrico, todas as modificações que a deslocação desta linha poderia trazer á sua equação. Se pois os dous lugares coincidem realmente, será preciso que esta equação, assim generalisada, possa comprehender a outra como caso particular, dispondo convenientemente das constantes arbitrarias relativas á situação dos novos, eixos para identificar os termos pelos quaes estas duas equações a principio differiam. Quando, pelo contrario, nenhum systema de valores reaes destas diversas constantes póde ser sufficiente a uma tal identificação, teremos igualmente verificado que os dous lugares são realmente distinctos. As constantes assim introduzidas serão, em geral, em numero de quatro, duas lineares, relativas á deslocação da

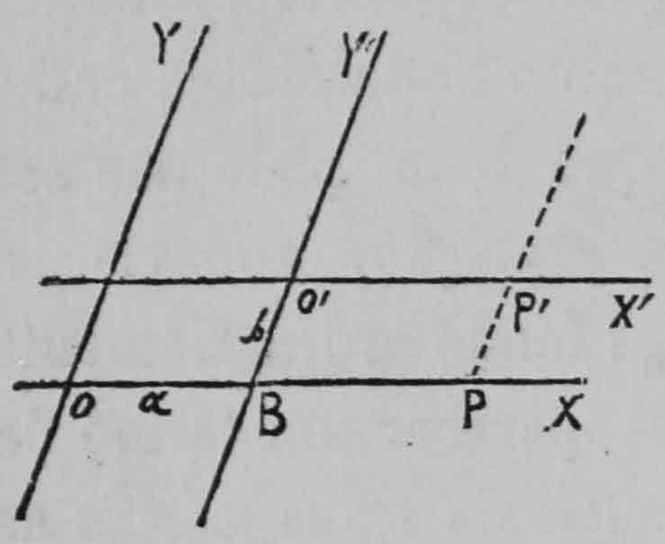
origem, e duas angulares, indicando a direcção dos novos eixos; mas, como, nesta comparação, a inclinação dos eixos não deve mudar, estas duas ultimas não serão então simultaneamente arbitrarias; de sorte que as formulas de transposição só encerrarão tres dados verdadeiramente disponiveis.

Relativamente á simplificação especial de uma equação isolada, tivemos, no capitulo precedente, varias occasiões de reconhecer a influencia notavel que póde exercer, a este respeito, a escolha dos eixos. Ora, de outro lado, as definições geometricas são muitas vezes improprias para indicar directamente os eixos mais favoraveis: os casos que temos examinado fariam conceber, a este respeito, esperanças mui exageradas, senão as julgassemos, sob este ponto de vista, como verdadeiras excepções. Basta, pois, em geral, pensar que a equação rectilinea de uma curva poderá frequentemente não ter á primeira vista a forma mais simples de que seja susceptivel, por causa da escolha dos eixos. Isto posto, a theoria actual fornece um meio certo de descobrir sempre os eixos mais convenientes, por mais complicada que possa ser a equação primitiva. Com effeito, é preciso operar uma transposição totalmente indeterminada, para descobrir logo a situação dos eixos proprios a fazer desapparecer certos termos, cujos coefficientes conterão as constantes arbitrarias assim introduzidas. Estas quatro constantes serão aqui plenamente disponiveis, visto como nada obriga então a manter a antiga inclinação dos eixos, que bem póde não ser sempre a mais propria para simplificar a equação. Todavia, a vantagem de conservar eixos rectangulares tendo ordinariamente mais apreço do que a faculdade de fazer desapparecer um termo de mais, dispondo de sua obliquidade, as formulas de transposição as mais das vezes só conterão tres constantes arbitrarias, como no seu primeiro destino.

Ainda que este segundo fim da theoria actual seja, por sua natureza, tão geral como o outro, tem realmente menor importancia no complexo da geometria analytica; pois, que a descoberta da identidade das curvas, máo grado a diversidade das equações, é igualmente preciosa para com todas as linhas possiveis. Pelo contrario, a simplificação de cada equação, por meio de uma escolha conveniente dos eixos, não poderia offerecer o mesmo interesse para todos os casos; visto como a faculdade que se adquire assim de tirar quando muito quatro termos a toda equação, torna-se necessa-

riamente menos efficaz, á medida que o numero total dos termos augmenta pelo accrescimo do gráo. A apreciação commum repousa muito exclusivamente, a este respeito, sobre a consideração das curvas do 2º gráo, cujas equações podem perder por isso até os dous terços de seus termos, ou a metade mantendo-se a rectangularidade dos eixos ; ao passo que, desde o 4º gráo ou m esmo desde o 3º, a simplificação correspondente não tem mais do que uma fraca importancia, pelo menos, em relação ao complexo dos casos, ainda que cada gráo ulterior apresente aliás certas occasiões de utilisar notavelmente uma tal faculdade analytica.

Após estas explicações geraes, relativas á unica difficuldade essencial da theoria actual, é facil proceder ao estabelecimento directo das formulas de transposição. Convém todavia distinguir a deslocação da origem e a mudança de direcção dos eixos; quando estes dous casos tiverem sido formulados separadamente, o caso geral decorrerá espontaneamente, se concebermos as duas transposições como successivas em vez de sere m simultaneas. Esta decomposição é além disso mui conforme á natureza do assumpto, visto que permitte offerecer distinctamente as modificações analyticas relativas á simples translação dos lugares e as mais profundas, que resultam de sua rotação.



(*Fig. 30*)

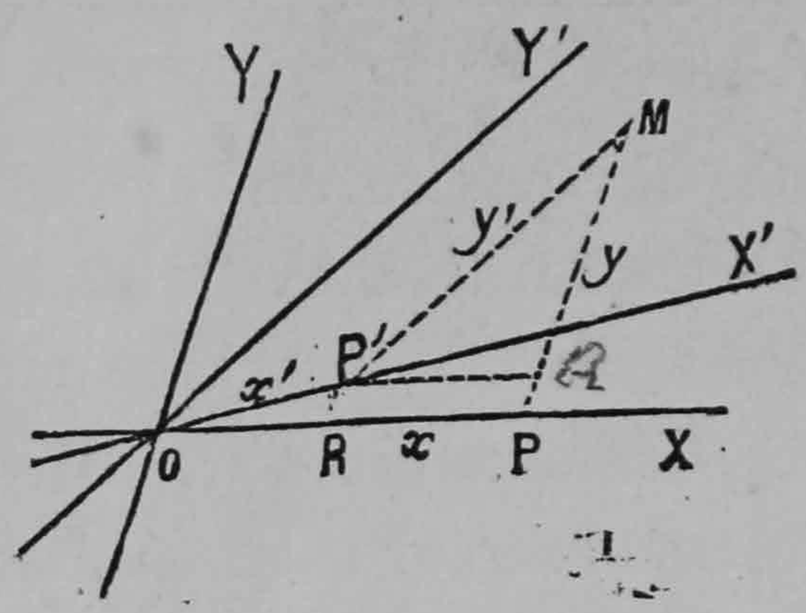
Supponhamos, pois, que trata-se primeiramente de passar dos eixos OX e OY (fig. 30) a um systema parallelo tendo sua origem em O'. A inspecção da figura indica logo as formulas

$$x = x' + a \quad , \quad y = y' + b,$$

em que a e b designam as antigas coordenadas da nova origem, tendo o cuidado de lhes attribuir, em cad caso, os signaes convenientes, sem os quaes estas formulas não poderiam ser sufficientemente geraes. Vê-se por sua composição que não só o gráo de uma equação nunca poderá experimentar assim mudança alguma, como era facil de prever, mas, além disso, que as modificações analyticas correspondentes nunca poderão affectar os termos de mais alto expoente.

Consideremos em segundo lugar, a passagem dos eixos OX e OY, (fig. 31) a outros eixos OX' e OY' differentemente dirigidos em torno da mesma origem. Para referir as coor-

denadas antigas MP e OP ás novas MP' e OP', com o auxilio dos dados angulares, a difficuldade trigonometrica consiste em resolver o quadrilatero OPMP', por meio de dous lados e dos angulos. Todo o artificio desta solução reside em uma feliz decomposição dos lados incognitos MP e OP em duas partes mais facilmente apreciaveis, pelas parallelas P'R e P'Q que lhe são tiradas de P', artificio tanto menos difficil de reter quanto é essencialmente analogo ao que se emprega commummente para estabelecer as formulas de sen $(a \pm b)$ e cos $(a \pm b)$. Tem-se assim



(*Fig.* 31)

$$x = OR + P'Q \quad , \quad y = P'R + MQ,$$

e desde então fica-se certo da solução, porque estas quatro incognitas auxiliares pertencem a dous triangulos OP'R e P'MQ, em cada um dos quaes conhecem-se directamente um lado e os angulos. Executando a operação trigonometrica, acham-se as formulas

$$y = \frac{x' \text{ sen } X' + y' \text{ sen } Y'}{\text{sen } Y}, \quad x = \frac{x' \text{ sen } (Y - X') + y' \text{ sen } (Y - Y')}{\text{sen } Y}$$

em que as letras maiusculas designam os angulos formados pelos eixos correspondentes com o antigo eixo dos x. Essa notação expressiva, emanada da de Carnot para a geometria a tres dimensões, deriva no fundo, da universal notação geometrica dos angulos, supprimindo-se, como inuteis, primeiramente a letra relativa ao vertice identico de todos os angulos considerados, e depois a que indica o seu lado commum.

A composição dessas novas formulas mostra que a mudança de direcção dos eixos não póde tão pouco alterar o gráo de uma equação, segundo uma apreciação natural que dispõe a considerar, em geral, esse gráo como constituindo um caracter essencial de cada curva: porém vê-se aqui que a rotação de uma curva poderá modificar todos os termos de sua equação, sem exceptuar os do mais alto expoente, a que a simples translação não podia attingir.

Para mudar ao mesmo tempo a origem e a direcção dos eixos, basta introduzir um systema auxiliar, tendo a mesma origem que um dos dous systemas comparados e a mesma direcção que o ou-

tro. Combinando assim as duas sortes de formulas obtem-se logo as formulas de transposição as mais completas

$$y = \frac{x' \operatorname{sen} X' + y' \operatorname{sen} Y'}{\operatorname{sen} Y} + b, \; x = \frac{x' \operatorname{sen} (Y - X') + y' \operatorname{sen} (Y - Y')}{\operatorname{sen} Y} + a,$$

que circumscrevem exactamente a influencia geral que a simples deslocação de uma linha qualquer póde exercer sobre sua equação.

Como os eixos primitivos são quasi sempre rectangulares, importa observar a simplificação que experimentam então estas formulas. Suppondo $Y = 90^0$, tomam ellas a forma mui symetrica,

$$y = x' \operatorname{sen} X' + y' \operatorname{sen} Y' \; , \; x = x' \cos X' + y' \cos Y',$$

se a origem não mudou. Os novos eixos sendo tambem as mais das vezes rectangulares, teremos, além disto, $Y' - X' = 90^0$, donde $Y' = 90^0 + X'$; e, por conseguinte, as formulas tornam-se

$$y = x' \operatorname{sen} X' + y' \cos X', \; x = x' \cos X' - y' \operatorname{sen} X'.$$

Retem-se facilmente a opposição de signaes que altera a symetria destas ultimas formulas, segundo a consideração evidente que a funcção $y + x$ deve então ficar invariavel, como relativa á distancia do ponto á commum origem, igualmente exprimivel nos dous systemas rectangulares: pois, concebe-se assim a necessidade de semelhante contraste algebrico, cujo sentido effectivo póde ao depois especificar-se claramente, tendo em vista, sobre a figura, a hypothese particular $x' = o$. Estas observações têm tanto mais interesse quanto estas formulas devem ser, no fundo, as mais usuaes.

Afim de melhor caracterisar já o principal destino geral das formulas precedentes, appliquemol-as ao reconhecimento da identidade das curvas representadas pelas duas aquações

$$y^4 + x^4 = 1 \; , \; y^4 + x^4 + 6\, x^2\, y^2 = 2,$$

cuja differença affecta mesmo os termos do mais alto grão. O calculo prescripto pode aqui abreviar-se muito, observando-se que a origem é então o centro commum das duas curvas, ambas evidentemente symetricas em torno dos dous eixos. Se pois as duas curva coincidem realmente, as suas equações devem ser identificaveis por uma simples rotação dos eixos, sem deslocar de modo algum a ori-

gem. Substituiremos, por conseguinte, na primeira, as formulas

$$x = x' \cos X' - y' \operatorname{sen} X' \ , \ y = x' \operatorname{sen} X' + y' \cos X' \ ,$$

o que lhe fará tomar a forma

$$\begin{array}{l|l|l|l} \operatorname{sen}^4 X' & y'^4 + \operatorname{sen}^4 X' & x'^4 + 12 \operatorname{sen}^2 X' \cos^2 X' & x'^2 y'^2 + \\ + \cos^4 X' & \quad + \cos^4 X' & & \\ \hline + 4 \operatorname{sen}^3 X' \cos X' & x'^3 y' + 4 \cos X' \operatorname{sen}^3 X' & x' y'^3 = 1 \ . & \\ - 4 \cos^3 X' \operatorname{sen} X' & \quad - 4 \operatorname{sen} X' \cos^3 X' & & \end{array}$$

Comparando-a com a segunda, depois de haver tornado o primeiro coefficiente igual á unidade, para evitar toda condição superflua, vê-se que sua identificação exige primeiramente o desapparecimento dos dous ultimos termos, donde resulta a relação unica

$$4 \operatorname{sen} X' \cos X' (\operatorname{sen}^2 X' - \cos^2 X') = 0.$$

Os factores sen X' e cos X' não podendo ser annullados, vistos que os eixos não seriam mudados, o valor de X' resultará do terceiro, que dá $x' = 45^\circ$. Certificar-se-ha facilmente que essa hypothese satisfaz as outras condições de identificação. Assim a segunda curva não é realmente mais do que a primeira, depois desta ter girado da metade de um angulo recto.

30. — Ainda que a passagem do systema rectilineo ao systema polar constitua, por sua natureza, em geometria analytica, uma operação mui differente d'aquella cujas leis acabamos de estabelecer, pois que se trata de uma verdadeira mudança de systema, e não de uma simples modificação de constantes, é aqui todavia que melhoconvém collocar as formulas indispensaveis, exigidas por uma tal transformação que aliás tem ordinariamente necessidade de ser precedida de uma transposição de eixos, destinada a facilital-a tanto quanto possivel. Supporemos, com effeito, que os eixos do systema rectilineo são rectangulares, que um delles coincide com o eixo polar, e que a sua origem está collocada no polo. Quando estas condições previas não forem preenchidas, constituirão uma difficuldade preliminar, facil de resolver em cada caso por meio das formulas precedentes. Este preambulo simplifica muito, e mesmo caracterisa melhor a operação propria á verdadeira mudança de systema. As antigas e as novas coordenadas de um ponto qualquer pertencem en-

tão a um mesmo triangulo rectangulo, que fornece logo, para passar do systema rectilineo ao systema polar, as formulas simplïssimas

$$x = u \cos \varphi \quad , \quad y = u \operatorname{sen} \varphi ,$$

ou em sentido inverso,

$$u = \sqrt{y^2 + x^2} \, , \; \operatorname{tang} \alpha = \frac{y}{x} \, .$$

Conforme a sua natureza, vê-se que as equações que forem algebricas n'um dos systemas, tornar-se-hão necessariamente transcedentes no outro, e que a influencia será ás vezes reciproca,o que define claramente o contraste analytico destes dous systemas, e caracterisa a aptidão especial de cada um delles para com certas curvas, ainda que muitas equações devão ser aliás quasi igualmente complicadas.

31.— Estando agora completa a primeira parte de nosso estudo, pode o leitor d'aqui em diante comprehender convenientemente o plano systematico, que não teria sido a principio sufficientemente apreciavel. Este preambulo indispensavel constitue uma introducção fundamental ao conjunto da geometria plana : qualquer que seja a extenção analytica que ella possa ulteriormente receber, todas as noções se referirão sempre á concepção geral que havemos aqui directamente estabelecido, depois de esclarecida por exemplos sufficientes, e emfim apoiada nos meios preliminares convenientes. Desde então estamos assaz habilitados a estabelecer methodos geraes que constituem o objecto essencial da geometria analytica, e o faremos immediatamente, sem preoccupar-nos ainda de nenhuma applicação especial : tal será o destino da segunda parte. Mas, depois de ter assim aprendido a resolver, em relação a uma curva qualquer, cada uma das questões analyticamente accessiveis, restará a conbinar, na terceira parte, estas diversas concepções a principio isoladas, afim de apreciar, em geral, como sua connexão mutua póde fazer surgir gradualmente das diversas equações o complexo das figuras correspondentes. Assim, a segunda parte referir-se-ha sobre tudo á geometria geral ; a terceira será essencialmente relativa á geometria comparada. Emfim, para acabar de precisar tanto quanto possivel a harmonia fundamental entre as linhas e as equações, constituida na primeira parte e desenvolvida nas duas outras, será preciso reservar uma quarta e ultima parte para a applicação

especial destes methodos universaes a certas curvas escolhidas, em que a idéa mãi da geometria analytica deverá receber uma elaboração complementar, destinada a caracterisar sua modificação final de accordo com as conveniencias de cada caso. Tal é o novo plano didactico que achei mais proprio para fazer dignamente sobresahir a unidade philosophica que deve offerecer d'ora em diante o conjuncto da geometria plana, manifestando a participação, distincta de cada uma da suas partes essenciaes no desenvolvimento continuo do grande pensamento que Descartes deu-lhe para base invarivel.

Convém reconhecer que este plano racional não é, por sua natureza, de nenhum modo restricto ao ramo elementar da geometria analytica, ainda que devessemos aqui consideral-o excluzivamente. A primeira parte está necesseriamente tão completa agora como sempre conserva-se-ha, qualquer que seja o progresso ulterior da geometria plana. Quanto á segunda e portanto á terceira, serão actualmente limitadas pela imperfeição dos nossos conhecimentos analyticos, que não permittem abordar sufficientemente várias indagações geometricas importantes; mas não farão mais tarde senão estender-se mais, quando uma analyse superior tornar gradualmente accessiveis questões de que não nos occuparemos agora. Acontecerá o mesmo essencialmente para a quarta parte, onde, baldos dos processos analyticos convenientes, não poderiamos immediatamente emprehender o estudo especial de varias curvas interessantes, ás quaes poderemos ulteriormente applicar os diversos methodos geraes.

O nosso plano, pois, jámais deverá soffrer alteração alguma essencial, qualquer que possa ser ao depois a extensão real dos meios analyticos, de que resultará sómente o seu desenvolvimento continuo.

Assim, para converter este estudo elementar da geometria analytica, em um systema completo de geometria, que nunca foi instituido nem mesmo concebido até aqui, bastaria ajuntar convenientemente, como indiquei-o no primeiro tomo de minha *Philosophia positiva*, as diversas classes de questões geometricas que correspondem aos diversos graus principaes da analyse transcendente, ao passo que devemos agora nos limitar ás especulações sufficientemente accessiveis á analyse ordinaria.

SEGUNDA PARTE

THEORIAS GERAES DE GEOMETRIA PLANA, SUFFICIENTEMENTE ACCESSIVEIS A' ANALYSE ORDINARIA

32.— Estas theorias são em numero de sete, a saber:

1° A theoria do numero de pontos necessario a determinação de cada especie de curvas;

2.° A theoria das tangentes;

3.° A theoria das asymptotas;

4.° A theoria dos diametros;

5.° A theoria dos centros;

6.° A theoria da semelhança das curvas;

7.° A theoria das quadraturas, e, por conseguinte, das rectificações e das cubaturas.

A excepção da segunda, terceira e setima, podem ser completamente estabelecidas pela analyse ordinaria, sem que jámais uma analyse superior deva realmente accrescentar nada de essencial. Quanto a estas tres theorias, a analyse transcendente é verdadeiramente indispensavel para dar-lhes uma inteira generalidade. Sómente com o auxilio do calculo differencial é que a theoria das tangentes, e portanto a das asymptotas, que é, no fundo, um appendice natural da primeira, podem ser estendidas a todas as curva, actualmente exprimiveis pelas nossas equações. Do mesmo modo, a theoria das quadraturas exige ainda mais frequentemente o emprego do calculo integral.

Mas, ainda que estas tres theorias não possam, com effeito receber aqui toda plenitude de que são susceptiveis, não é menos iudispensavel tratal-as sob um ponto de vista geral, sem tornal-as viciosamente adherentes a nenhum dos casos particulares que poderem actualmente abranger. Além da vantagem philosophica de semelhante exposição, unica conforme com o verdadeiro espirito da geometria analytica, é certo que, mesmo em relação á ultima theoria, a menos accessivel, por sua natureza, á analyse ordinaria, exagera-se commummente o emprego da analyse transcendente, que só pód

realmente aperfeiçoar investigações anteriores á sua formação, e que tem-n'a mesmo historicamente determinado.

A nossa theoria das tangentes, sem nada exigir além dos mais simples elementos da algebra, estender-se-ha immediatamente a todas as equações algebricas propriamente ditas, pelo menos apoz certas preparações, ás vezes verdadeiramente trabalhosas. Sem comportar uma tal extensão directa, a nossa theoria das quadraturas abrangerá, todavia, casos assaz variados para que convenha muito reduzil-os aqui a uma marcha commum, á qual a analyse transcendente apenas teria ulteriormente de fornecer meios de formulação e de desenvolvimento mais adaptados á natureza do assumpto.

Com ambos os titulos, este primeiro estado didactico da geometria geral acha-se historicamente representado pela phase geometrica, mui memoravel, ainda que pouco prolongada, que teve logar entre Descartes e Leibnitz, sob os esforços convergentes de Fernat, Wallis e Huyghens. Demais, tanto importa attribuir assim á analyse ordinaria todo o alcance geometrico de que é verdadeiramente susceptivel, quanto é precioso evitar exageral-o puerilmente por uma imitação mais ou menos disfarçada dos methodos essencialmente infinitesimaes.

Todas as theorias acima enumeradas convém evidentemente a curvas quaesquer, sem confusão alguma de theorias puramente especiaes. Deixei para a quarta parte uma theoria muitas vezes qualificada indevidamente de geral, a dos fócos, que é necessariamente particular ás curvas do segundo grau.

Quanto á ordem que estabeleci entre essas diversas theorias, a principio considerei a sua dependencia, e ao depois a facilidade assim como a perfeição respectivas. Todos os que procurarem mudar este arranjamento ditactico, reconhecerão facilmente, eu o espero, que elle não comporta realmente modificação alguma essencial, nem mesmo util. Em um tratado directamente relativo ao systema total da geometria geral, tanto elementar como transcendente, importaria muito seguir rigorosamente a ordem racional, que ha muito tempo estabeleci no primeiro tomo de minha *Philosophia positiva*, e que resulta naturalmente das diversas especies de meios analyticos proprios á inteira apreciação de cada theoria geometrica, conforme dependa ella sómente da analyse ordinaria, ou exija um dos tres principaes graus de complicação successiva da analyse transcendente, a principio limitada ao emprego do calculo differencial, estendida ao

depois, em relação a outras questões, até aos differentes ramos do calculo integral, e emfim, quanto ás mais difficeis indagações, ampliada mesmo ao dominio do calculo das variações. Mas, aqui onde só consideramos os estudos geometricos mais ou menos accessi veis á simples algebra, náo póde existir nenhum motivo semelha nte para sujeitar este arranjo provisorio a uma regra invariavel, cuja discussão offereceria agora tão pouca consistencia quão pouca utilidade.

CAPITULO I

THEORIA DO NUMERO DE PONTOS NECESSARIO A' INTEIRA DETERMINAÇÃO DE CADA ESPECIE DE CURVAS.

33. — Posto que o principio geral de semelhante regra deva ser tão antigo como a idéa mãi da geometria analytica, posso assegurar que, quando emprehendi, ha vinte e cinco annos, regenerar o ensino mathematico, esta theoria não estava ainda nem formulada, nem mesmo concebida, no seu conjuncto, de sorte que tive então de construil-a directamente. Apezar de sua grande simplicidade, este importante assumpto elementar continúa hoje a ser habitualmente envolvido em confusão e incerteza, a tal ponto que geometras, aliás habeis, commettem ás vezes graves erros, por não terem convenientemente systematisado o seu estudo fundamental.

Logicamente considerada, esta primeira theoria é eminentemente propria para fornecer o typo espontaneo da perfeição que comportam os methodos da geometria analytica, quer quanto á sua generalidade, que se estenderá aqui a todas as equações possiveis, quér quanto á sua facilidade as mais das vezes levada, a este respeito, até dispensar quasi todo o calculo effectivo. Todavia, semelhante modelo daria uma idéa exagerada do qne é commummente realizavel, se esperassemos fóra de proposito poder obter regras tão satisfactorias a respeito de assumptos mais difficeis.

Para deduzir, da equação de uma curva de especie dada, o numero de pontos exigidos para sua determinação total, ao mesmo

tempo de posição e grandeza, é mister, antes de tudo, estabelecer cuidadosamente uma distincção fundamental, de ordinario pessimamente concebida, entre o caso em que se tem directamente a equação a mais *geral* correspondente á definição proposta e aquelle em que só se conhece a principio uma equação mais ou menos *particular*. Estas duas denominações são aqui destinadas a indicar que a equação convém a todas as situações possiveis da curva, ou que é restricta a certas situações, ás vezes mesmo a uma só. Assim as equações $y^2+x^2-2by-2ax+(b^2+a^2-r^2)=o$, $e\ y=ax+b$, são as mais geraes do circulo e da linha recta, ao passo que as equações $y^2+x^2=r^2, y=ax$, são, pelo contrario, particularea para com as mesmas linhas. Confunde-se ainda muitas vezes a equação a mais geral de cada especie de curvas com a equação a mais extensa do grau correspondente ; o que é quasi sempre erroneo, mesmo para o segundo grau, em que a equação a mais geral do circulo, assim como a mais complicada da parabola, longe estão de coincidir com o typo analytico o mais completo : á medida que o grau se eleva, estes casos se multiplicam mais, como logo se o ha de sentir, comparativamente aos outros.

De accordo com a explicação precedente, a equação a mais geral de cada especie de curvas é, em qualquer systema de coordenadas, necessariamente unica. Mas, pelo contrario, a equação póde ser mais ou menos particular, conforme corresponder a situações mais ou menos determinadas: è assim que, por exemplo, $y^2+x^2-2ax+a^2-r^2=o$, constitue evidentemente uma equação do circulo, que não é nem a mais geral, nem a mais particular. O grau de particularidade estimar-se-ha analyticamente por meio do numero de constantes arbitrarias que perde então a equação a mais geral: de sorte que as duas equações do circulo $y^2+x^2=r^2, y^2=2rx-x^2$, ainda que distinctas, são igualmente particulares, com quanto relativas a posições tambem restrictas. Teremos occasião de reconhecer em seguida que esta diminuição variavel do numero de constantes arbitrarias comporta necessariamente um limite commum a todas as curvas, cuja equação a mais extensa nunca póde perder assim mais de trez constantes.

34. — Isto posto, consideremos em primeiro logar o caso em que se conhece a equação a mais geral da curva proposta : é o unico ao qual se deve referir directamente semelhante determinação; pois que esta equação é assim considerada, em cadaa occasião, immedi-

tamente dada, consistindo o problema então em achar, para as constantes arbitrarias que ella contém, um systema de valores proprio a fazer passar a curva pelos pontos indicados. Seja pois

$$f(x, y, a, b, c, d, \ldots) = o,$$

esta equação, em que as incognitas são as constantes, ás vezes chamadas geometricamente *parametros*, aliás lineares ou angulares, etc., que devem distinguir a curva pedida de outra qualquer da mesma especie. Todo o ponto M' por onde esta curva deve passar sujeitará estas constantes á relação

$$f(x', y', a, b, c, d, \ldots) = o.$$

resultante da substituição de suas coordenadas especiaes x e y' em logar das coordenadas variaveis x e y. Assim o problema não será determinado senão quando o numero destas condições, ou dos pontos que as fornecem, fôr exactamente igual ao das constantes procuradas. Todavia, apressando-nos em redigir, sob esta fórma espontanea, a nossa regra fundamental, arriscariamos muitas vezes a commetter graves erros, exagerando ás vezes muito o numero de pontos determinantes. Pois, póde acontecer que as constantes arbitrarias encerradas na equação a mais geral sejam mais numerosas do que os termos distinctos que as contém. Além de que uma tal circumstancia póde frequentemente resultar das transformações algebricas, póde tambem provir da propria natureza das definições. Se, por exemplo considera-se o circulo como a curva igualmente esclarecida por duas luzes, e se colloca ao acaso os eixos rectangulares, a sua equação geral conterá certamente cinco constantes arbitrarias, que todavia só entravam em tres termos. Da mesma maneira, e em mais alto grau, a equação geral do circulo poderia encerrar um numero qualquer de constantes, procurando-se o logar de um ponto cuja somma dos quadrados das distancias a diversos pontos fixos, tão multiplicados quanto se quizer, fica invariavel. Ora, em todos os casos deste genero, é evidente que o numero das constantes arbitrarias indicaria mal o dos pontos determinantes, porque os valores parciaes destas constantes não são então de nenhum modo necessarios para que a curva seja plenamente individualisada, uma vez que se conheça sómente os valores collectivos dos diversos grupos algebricos segundo os quaes ellas constituem os coefficientes verdadeiramente differentes, e cujo numero effectivo deve aqui indicar a verdadeira solução do problema proposto. Sem esta indispensavel res-

tricção, as diversas transformações, quer analyticas, quer geometricas, poderiam fazer indefinidamente variar um caracter que deve ser especialmente fixo. A regra fundamental que procuramos deve pois finalmente consistir em operar, sobre a equação geral dada, uma dupla enumeração, contando separadamente não só o numero de suas constantes arbitrarias mas tambem o numero dos termos distinctos que os contém: o menor destes dous numeros será sempre o dos pontos exigidos pela determinação da curva correspondente; se fossem iguaes, adoptar-se-hia o seu valor commum. E' assim, por exemplo, que o circulo será analyticamente reconhecido determinavel por meio de tres pontos, de qualquer definição que proceda a sua equação geral. Importa aliás observar, em principio, a respeito desta regra, que, pela natureza da questão, convém igualmente a todos os systemas possiveis de coordenadas.

E' a unica theoria geral de geometria que comporta um tal previlegio, eminentemente proprio a facilitar-lhe a applicação.

35.— Supponhamos agora que, segundo o caso mais frequente, a curva proposta não seja a principio caracterisada analyticamente a não ser por uma equação mais ou menos particular em coordenadas rectilineas, como a mór parte das curvas introduzidas na primeira parte deste tratado. O unico meio universal de conhecer então o numero de pontos determinante consiste em deduzir a equação mais geral, operando uma transposição de eixos indeterminada, pela substituição das formulas

$$x = x' \cos X' - y' \operatorname{sen} X' + a,\ y = x' \operatorname{sen} X' + y' \cos X' + b,$$

se os eixos são rectangulares. Por mais particular que possa ser a equação primitiva, e quando mesmo ella só conviesse a uma unica situação, semelhante transformação tel-a ha sempre assáz generalisado, visto como a posição da curva a respeito dos eixos ter-se-ha tornado inteiramente qualquer, uma vez que se conte a, b, e X', como tres novas constantes completamente arbitrarias. Este segundo caso tendo desde então entrado no primeiro, bastará applicar convenientemente a regra fundamental, da mesma maneira que se a equação a mais geral tivesse sido directamente dada.

A estricta execução de uma tal operação exigiria muitas vezes longos calculos para o desenvolvimento algebrico da substituição prescripta, quando os expoentes fossem um pouco consideraveis. Mas importa reconhecer que poder-se-ha frequentemente dispensar

a realisação desta substituição, limitando-nos a indical-a, ou mesmo concebel-a. Pois, não se tem realmente necessidade aqui de effectual-a a não ser pela dupla enumeração que exige a nossa regra para com a equação generalisada. Ora, destas duas enumerações, a primeira, a das constantes arbitrarias, póde evidentemente sempre ser feita de antemão, pois que reduzir-se-ha necessariamente a augmentar de tres o numero indicado pela equação particular. Quanto á enumeração dos termos distinctos, só seria certamente praticavel sem incerteza por meio da realisação effectiva de uma tal generalisação analytica; mas sabemos, em principio, que não torna-se realmente indispensavel senão quando esse numero de termos for inferior ao numero total das constantes. Assim, a primeira enumeração, sendo immediatamente facil, indicará a principio, em um caso qualquer, um limite superior do numero de pontos exigido, o que já póde ser as vezes mui precioso: porém' além disso, esta indicação tornar-se-ha muitas vezes definitiva quando, sem conhecer exactamente o numero effectivo dos termos proprios á equação generalisada, um primeiro resumo do conjuncto do calculo terá dado a certeza de que esse numero não seria menor do qne o das constantes, tanto primitivas como introduzidas.

Applicando esta explicação á mór parte dos exemplos citados na nossa primeira parte, será facil descobrir o numero de pontos determinantes das curvas correspondentes, ainda que conhecidas sómente por equações particulares e mesmo unicas, que será todavia superfluo generalizar formalmente. E' assim que a equação (19)

$$c^2 y^2 + (c^2 - d^2)\, x^2 = \frac{c^2}{4}\,(c^2 - d^2)$$

indica evidentemente uma curva exigindo no maximo cinco pontos para sua determinação, e com a certeza de que este numero não é demasiado consideravel, pois que, sem executar a substituição reconhece-se logo que as constantes c, d, e a, b, X' entrariam effectivamente em cinco termos distinctos. Deve-se todavia notar, sobre este primeiro exemplo, que o caso do circulo $d=o$, faz excepção a justeza deste resumo; pois, uma das constantes sendo então dada, restariam ainda quatro, o que excede o verdadeiro numero dos pontos. A anomalia consistiria aqui algebricamente em que, por uma reducção especial; que só manisfestaria a execução do calculo, os tres termos differentes dos do segundo grão conteriam

exclusivamente as quatro constantes arbitrarias. Geometricamente, a excepção proveria de que a equação particular só então carece de generalidade relativamente a origem, e não quanto a direcção dos eixos rectangulares que, neste caso, poderia ser qualquer, de sorte que esta equação seria sufficientemente generalisada por um simples deslocamento indeterminado da origem, que só elevaria a tres o numero total das constantes arbitrarias. Por mais satisfatoria que seja esta explicação excepcional, a necessidade de recorrer a ella e o uso que ahi se faz das luzes jà adquirida sobre uma curva tão estudada, devem fazer sentir com que circumspecção é mister applicar a abreviação indicada, e quanto importa, em geral, resignarmo-nos á execução do calculo prescripto, quando os motivos de dispensa não apresentam uma perfeita evidencia. Concebe-se além disso que, em relação a um grande numero de curvas, certas definições podem ás vezes dar equaçòes particulares demasiado sobrecarregadas de constantes arbitrarias. Mas estas diversas sortes de restricções proprias á nossa consideração abreviativa não impedem de modo algum que ella seja, em muitos outros casos, tão certa quanto commoda.

Por exemplo, a equação commum das tres secções conicas, achada no n. 23,

$$y^2 + (1 - n^2)\, x^2 - 2\, dx + d^2 = 0.$$

indica logo, e sem nenhuma incerteza, que o numero de pontos determinantes é cinco para a elipse e hyperbole, porém sómente quatro para a parabola, visto como então $n = 1$.

Acharemos igualmente, e ainda com mais segurança, visto o gráo superior, de accordo com a equação das secções toricas (22), que estas curvas são determinaveis por cinco pontos, salvo a que é caracterisada pela igualdade dos dous dados lineares, e que, a esse titulo, só deve exigir quatro. Para a conchoide (24), o numero de pontos determinante será igualmente 5, com a mesma reducção no caso analogo de igualdade.

Emfim a equação da cissoide (26)

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

mostrará, sem mais embaraços, que esta curva é determinada por quatro pontos.

Seria igualmente facil de averiguar, sobre novos exemplos, comprehendendo uma infinidade de curvas distinctas, que as equações da forma

$$y^m = ax^n \ , \text{ ou } y^m = ax^n + b,$$

indicão sempre curvas que exigem, umas quatro pontos, as outras cinco, para sua determinação : o motivo de dispensa algebrica será tanto mais evidente quanto os expoentes m e n forem mais elevado. Concebe-se demais que a theoria actual é já tão completamente applicavel as equações ditas transcendentes como ás qualificadas especialmente de algebricas, salvo as difficuldades analyticas correspondentes. E' assim que o mesmo methodo, igualmente simplificado, demonstraria, por meio das equações particulares

$$y = ba^x \ , \ y = a \text{ sen } bx,$$

que o numero dos pontos determinante é ainda igual a 5.

Sem multiplicar mais aqui taes exemplos, a approximação, ao mesmo tempo analytica e geometrica, de todos os casos citados suggere logo esta reflexão geral—que o numero de pontos necessario á determinação de uma curva não depende essencialmente do gráo, nem mesmo da natureza, de sua equação, e muito menos de sua figura essencial. Achamos sobretudo uma exacta paridade, a esse respeito, entre curvas que sob qualquer outro aspecto, não parecem offerecer nenhum caracter commum. Entretanto uma identidade tão importante não deve, sem duvida, ficar isolada. O conjuncto das minhas meditações sobre a geometria comparada, cujo estudo, apenas esboçado, é ainda tão mal concebido, levou-me desde muito tempo a pensar que as curvas que exigem o mesmo numero de pontos para sua determinação, apresentão, por isso mesmo, muitas outras propriedades com muns. Mas o estado presente da sciencia sómente manifestou até aqui, a esse respeito, a exacta paridade assim assegurada a essas diversas curvas quaesquer, na geometria transcedente, quanto aos gráos de contacto ou de osculação que comportam em relação a qualquer outra figura : ainda assim esta analogia necessaria é commumente muito mal apreciada.

36.— Afim de completar a nossa regra fundamental, resta caracterisar a indispensavel modificação que ella deve experimentar quando, entre os pontos que se faz concorrer para a

determinação da curva, introduz-se algum ponto *singular*; isto é, segundo a accepção geometrica a mais extensa, um ponto distincto de todos os outros por uma propriedade precisa, aliás qualquer, a qual se tem em vista, quer esse ponto pertença, com effeito, á circumferencia da curva, como um ponto de inflexão ou de reversão, etc., quer mesmo em geral, adhira a ella, interior ou exteriormente, como um centro, ou um fóco etc. De qualquer maneira que se opere a singularisação, cada ponto deste genero dever-se-ha sempre contar por dous pontos ordinarios, porque dará lugar a duas equações de condição. Se está sobre a curva, será mister, além da condicção commum

$$f(x', y', a, b, c, d, \ldots) = 0$$

considerar tambem a relação qualquer

$$\varphi\,(x', y', a, b, c, d, \ldots\ldots) = o\,,$$

que formular a sua propriedade caracteristica. Ainda que esta segunda equação possa ser muito differente da primeira, concorrerá tambem para a determinação das incognitas a, b, c, d, etc., que achar-se-hão assim tão ligadas, como segundo dous pontos ordinarios. Quando o ponto singular não pertence a circunferencia da curva, é preciso conceber em geral que, porisso mesmo que elle é unico, suas proprias coordenadas α, β, devem depender, de uma maneira determinada, das constantes que especeficam a curva, segundo duas funcções

$$\alpha = \varphi\,(a, b, c, d, \ldots), \quad \beta = \psi\,(a, b, c, d, \ldots),$$

cuja fórma será em cada caso exactamente assignavel, segundo a equação da curva e o caracter do ponto. Portanto, reciprocamente, a indicação destas duas coordenadas sugeita as constan.es, quando são desconhecidas, a duas condições dist.nctas, que se podem considerar, para sua determinação, como occupando o logar de dous pontos quaesquer da curva.

Pôde-se facilmente verificar esta lei uniforme em todas as linhas introduzidas na primeira parte, e cujas definições contêm pontos evidentemente singulares. Si, de acordo com a descoberta já realisada do seu numero ordinario de pontos determinantes, examinar-se por contraste a reducção especial que elle experimenta expontaneamente, quando se introduzem estes pontos excepcionaes, será facil averiguar successiveimente, segundo as defi-

niçòes respectivas, que o centro do circulo , cada um dos ponto fixos inherentes a uma ou outra geração das secções conicas, cada ponto analogo proprio á noção das secções toricas, ou da conchoide, ou da cissoide, equivale sempre effectivamente, para a determinação da curva, á obrigação de passar em dous pontos arbitrarios.

A unica derrogação apparente á uniformidade desta lei addicional, parece dever resultar a principio da desigual pluraridade das propriedades dos diversos pontos singulares. Assim, por exemplo, um mesmo ponto póde algumas vezes ser um centro e um ponto de inflexão : os vertices da ellipse, primitivamente definido por seu encontro com os eixos, são tambem caracterisados por uma tangente perpendicular ao raio correspondente, e se distinguem igualmente como pontos de maior ou menor curvatura. Em todos estes casos, póde-se crer que a introducção de taes pontos singulares fornecerá novas equações de condição, á medida que se formularem suas diversas propriedades; de sorte que assim elles substituiriam, na determinação da curva procurada, ora dous, ora tres, ora quatro, etc., pontos ordinarios. Mas é facil sentir que esta objecção geral é puramente especiosa. Póde-se a principio affastal-a como uma consideração prejudicial tirada do evidente absurdo que offereceria assim a variação continua do numero de pontos determinante proprio a cada curva pela descoberta, sempre possivel, de novas particularidades a respeito dos pontos já singularisados, á medida que o estudo especial da curva estivesse mais adiantado. Um exame directo faz em seguida sentir, em principio, que, por preciso que seja o caracter pelo qual o ponto singular tenha sido primitivamente definido e formulado, qualquer outra propriedade que se lhe descobrisse ultimamente não poderia ministrar nenhuma condição verdadeiramente distincta. Segundo o encadeiamento, sensivel ou despercebido, geral ou especial, que existiria necessariamente entre os dous attributos geometricos, as relações analyticas seriam em cada caso essencialmente equivalentes ; de sorte que a multiplicidade destas consequencias não contriburiam mais a determinar as constantes procuradas do que a equação inicial de que todas poderiam derivar, mais ou menos penosamente.

37.— Para dar sempre á theoria actual toda a perfeição effectiva de que é susceptivel, é preciso emfim explicar como o principio analytico sobre que repousa uniformemente, torna-se muitas vezes

applicavel, sem conhecer ainda nenhuma equação rectilinea, mesmo particular, da curva proposta, consultando unicamente a sua definição geometrica. Conceber-se-ha a possibilidade se considerarmos que a equação serve aqui sómente como base de uma enumeração que póde ás vezes ser sufficientemente realizada só pela definição. Pois, se o numero total das constantes arbitrarias proprias á equação geral se determina sempre facilmente por uma equação particular, melhor ainda deduz-se da propria definição. Basta, para isso, analysar exactamente os diversos dados geometricos que ella indica como indispensaveis á inteira determinação da curva: cada ponto fixo que contiver introduziria certamente, por suas coordenadas, duas constantes arbitrarias na equação a mais geral, á qual é mister sempre nos referirmos mentalmente; o mesmo acontecerá para cada recta fixa, por causa de seus dous coeficientes angular e linear; cada circulo inteiramente dado faria nascer tres constantes; cada comprimento ou cada angulo uma só, etc. Esta nova abreviação da regra fundamental terá a mesma legitimidade e offerecerá tambem a mesma probabilidade de erro que a precedentemente apreciada, visto como repousa sobre o mesmo motivo analytico. Acharemos sempre assim um limite superior do numero de pontos determinante. Quando esse limite não fôr muito elevado, o que corresponde ao caso analytico em que o numero effectivo dos termos da equação geral não se achar inferior ao das constantes, reconhecel-o-hemos geometricamente, se a definição proposta fôr assaz simples, para que nos possamos certificar que as mudanças simultaneas dos diversos dados jamais poderiam ser compensadas a ponto de não fazer de modo algum variar a curva. Esta condição é facil de verificar em relação ás definições já citadas do circulo, das secções conicas, das secções toricas, da conchoide e cissoide, em que reconhecer-se-hia assim o numero de pontos determinante independentemente de toda equação, de perfeita conformidade com o resultado analytico. Para assignalal-a aqui em relação a uma definição nova, em que a equação não nos é realmente conhecida ainda, indicarei a *cycloide* ordinaria, gerada por um ponto da circumferencia de um circulo rolando sobre uma recta fixa, a partir de uma certa posição, e girando simultaneamente em torno de seu centro com a mesma velocidade: o methodo precedente conduz logo a reconhecer, sem a menor incerteza, que uma tal curva é determinavel por meio de quatro pontos. Afim de melhor apreciar este extremo aperfeiçoamento da theoria actual, é preciso aliás sentir que a defi-

nição proposta poderia mesmo não ser puramente geometrica: uma vez que seja precisa, e que, além disto, se preste sufficientemente á analyse prescripia, convirá igualmente a uma semelhante distincção. Trata-se,por exemplo,da linha segundo a qual um peso deve descer, para chegar o mais promptamente possivel de um ponto dado a outro tambem dado. Ainda qne esta definição transcendente seja unicamente dinamica e mui difficil de pôr em equação, o nosso methodo subsidiario indica já claramente quatro pontos determinantes, o que será ulteriormente confirmado quando se tiver reconhecido a cycloide.

A grande facilidade propria a este aperfeiçoamento final da nossa regra fundamental,deve aqui fazer insistir mais sobre o perigo, acima caracterisado, em principio,que offereceria, em muitos casos, a sua intempestiva applicação, quando o numero effectivo dos termos da equação geral fosse inferior ao numero assim previsto das constantes introduzidas. Esta circumstancia analytica corresponderia geometricamente á posssibilidade de fazer variar ao mesmo tempo muitos dos dados inherentes á difinição proposta, sem que a curva experimentasse mudança alguma real, quer de fórma, quer mesmo de situação. Ora, taes casos, ainda que frequentes, são difficeis de distinguir claramente só pela definição, sobretudo em relação a curvas pouco estudadas ou mui complicadas; e, quando uma vez reconhecidos, é quasi sempre impossivel reduzir convenientemente o limitte superior a principio obtido assim para o numero de pontos determinante. E' facil citar alguns exemplos carateristicos, mesmo em relação ao circulo, curva a mais simples e mais bem conhecida; tal é a sua definição como a curva igualmente esclarecida por duas luzes, que indicaria logo cinco pontos determinantes, porque os dous pontos fixos e a relação dada, poderiam variar conjunctamente, como já mostrei no n. 21, sem que a curva mudasse de modo algum; tal é tambem sua definição como segmento capaz, em que dois pontos fixos e o angulo dado poderiam certamente mudar de maneira a não affectar inteiramente o circulo correspondente; tal é emfim a sua difinição, já citada, como lugar de um ponto de que a somma dos quadrados das distancias a diversos pontos fixos é constante. Póde-se assim julgar das difficuldades muitas vezes insuperaveis que suscitariam semelhantes inconvenientes em relação a curvas mais complicadas e menos conhecidas, sobretudo considerando que a investigação do numero de pontos determinante deve ser naturalmente, em razão de sua simplicidade superior, o primeiro

objecto de estudos para com a mór parte das linhas. A regra analytica (34) é pois finalmente a unica que comporta uma universal efficacia, e nada poderia dispensar de geralmente recorrer-se a ella. Mas os inconvenientes irrecusaveis que apresenta, em muitas occaziões, á abreviação subsidiaria que acabo de explicar, não alteram de modo algum a sua feliz aptidão em relação aos casos mui numerosos, em que as condições necessarias de sua legitima applicação se acharem snfflcientemente prehenchidas.

Terminando aqui a exposição desta primeira theoria geral, importa observar que, comquanto não tenhamos considerado outras condições de determinação das curvas, senão as de passar por pontos dados, como sendo agora as unicas que sabemos uniformemente formular; entretanto o conjuncto das regras precedentes applicar-se-ha necessariamente a outra qualquer especie de condições geometricas, exprimiveis cada uma por uma unica equação, á medida que aprendermos ulteriormente sua representação analytica, o que deverá augmentar muito o alcance e a utilidade dos diversos principios que acabamos de estabelecer,

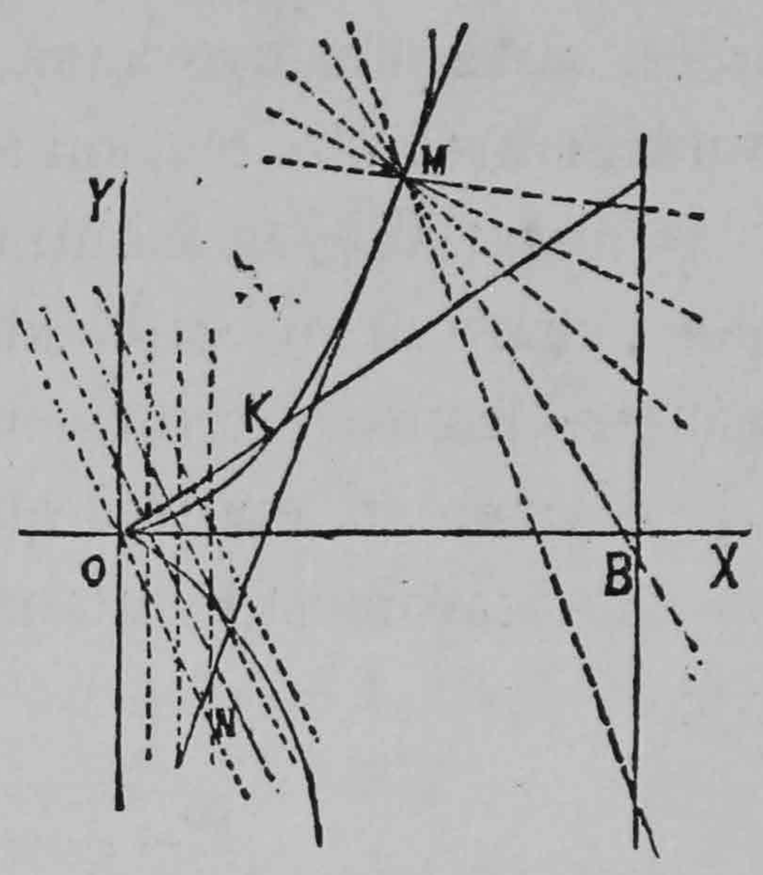
CAPITULO II

THEORIA DAS TANGENTES

38.—Esta importante theoria, base necessaria da approximação fundamental entre as figuras curvilineas e as figuras rectilineas, repousa inteiramente sobre uma conveniente definição da *tangente*.

Em sua primeira accepção geometrica, este termo foi por muito tempo limitado ao circulo, em que designa simplesmente uma recta que só tem com a curva um ponto commum. Haveria então um verdadeiro pleonasmo em acrescentar que todos os outros pontos da recta devem ser exteriores á curva, pois que esta circumstancia resulta evidentemente da condição primitiva, não só em relação ao circulo, mas tambem quanto a outra qualquer curva fechada e não sinuosa. Todavia, este caracter addicional torna-se-hia, em outros casos, indispensavel, afim de distinguir sufficientemente a tangente de certas rectas que, como ella, só encontram curva em um unico

ponto; assim como se vê, por exemplo, na parabola, para as paralellas ao eixo. Ainda que semelhante complemento torne a noçao inicial susceptivel de assaz grande extensão, permittindo applical-a a todas as curvas, muito mais numerosas do que se costuma suppor, que nenhuma recta poderia cortar em mais de dous pontos, é facil de reconhecer que este caracter primitivo não póde de modo algum tornar-se a base de uma definição verdadeiramente geral; pois, em muitos casos, esta unidade de intersecção não constitue uma condição quer necessaria, quer sufficiente, tendente a determiuar a tangente. Na cissoide, por exemplo, (fig. 32), a tangente a um ponto qualquer M cortará a curva em um segundo ponto N; ao passo que, pelo contrario, poderemos tirar de M uma infinidade de rectas differentes, que só teriam esse unico ponto commum com a curva, sem que nenhuma seguramente fosse tangente. Vê-se mesmo que esta condição não poderia então dar logar a nenhuma questão preciosa; é o que offereciam quasi sempre as curvas tendo mais de dous pontos em linha recta. Porèm, apezar desta evidente impossibilidade de conservar, em geral, a accepção inicial da palavra *tangente*, as leis da linguagem e do pensamento impõem a obrigação de sómente mudal-a por uma judiciosa extensão, que reproduza esponeamente o caracter primitivo para os casos particulares, aos quaes a principio se tinha destinado. Esta importante prescripção philosophica deve ser cuidadosamente respeitada para com todas as concepções scientificas que derivam de noções vulgares, afim de manter sempre a continuidade e a harmonia logicas, que seriam gravemente perturbadas por uma arbitraria alteração technica das expressões communs. A definição geral da tangente, tal como a concebemos agora, satisfaz plenamente a esta condição indispensavel. Consiste em considerar a tangente como limite para o qual tende uma secante de que um dos pontos de intersecção supposto movel approxima-se indefinidamente do outro supposto fixo, até que se confundam exactamente. Se continuassemos ao depois a rotação, a intersecção movel passaria além da intersecção fixa, de sorte que, em cada ponto de uma curva qualquer, a direcção tangencial serve de linha de demarcação entre as direcções



(*Fig. 32*)

que cortam de um lado deste ponto e as que cortam do outro lado. Por mais multiplicadas que possam ser as intersecções, só se devem aqui combinar duas, visto como dous pontos bastam para determinar uma recta. A confusão final das duas primeiras nada decide a respeito das outras, cuja coincidencia com ellas não poderia ser facultativa, e constituirá, com effeito, o caracter proprio de certos pontos excepcionaes.

Póde-se ainda apreciar o que uma tal definição geral conserva expontaneamente da noção inicial; pois, em relação a uma curva qualquer, a tangente, assim concebida, terá necessariamente um ponto commum de menos do que as rectas que os tem mais; por conseguinte, para todas as curvas que não pódessem offerecer mais de dous pontos em linha recta, a tangente achar-se-ha caracterisada, com effeito, pela unidade de intersecção, segundo a intercepção primitiva, de que todo o vicio consistia, pois, em uma restricção excessivamente grande. Esta generalisação se effectúa aliás de um modo perfeitamente conforme com o destino fundamental da theoria das tangentes no systema total da geometria; pois que a indispensavel approximação entre as figuras curvilineas e rectilineas, base natural das principaes especulações geometricas, suppõe sempre que se tenha determinado a lei segundo a qual variam as direcções dos lados do polygono que se substitúe mentalmente á curva, o que resulta evidentemente de uma semelhante consideração das tangentes.

Afim de prevenir toda incerteza sobre uma noção tão capital, importa emfim apreciar especialmente a necessidade de fazer a coincidencia caracteristica das duas intersecções pela rotação de uma em torno da outra, e não por meio de sua commum translação parallelamente á posição primitiva. Estes dous modos seriam, sem duvida, as mais das vezes equivalentes, o que basta para que sua distincção deva ser cuidadosamente introduzida na definição geral. A cissoide offerece um exemplo mui sensivel, se considerarmos em particular o ponto de reversão O, em que a tangente OB resulta da rotação de OK até que K e O se confundam; emquanto que as perpendiculares a OB, approximando-se cada vez mais de O, produziriam tambem a coincidencia de suas duas intersecções, sem se tornarem de modo algum tangentes. Vê-se mesmo que esta coincidencia proveniente da translação não determinaria, no ponto de reversão, nenhuma direcção precisa, visto como um tal attributo pertenceria indifferentemente a uma infinidade de direcções obliquas.

39.—Estando sufficientemente estabelecida a definição funda-

mental, é necessario agora conceber a theoria das tangentes como composta primeiramente de uma questão principal, que consiste em determinar, em cada ponto de uma curva, a direcção de sua tangente, e, ao depois, de varias questões accessorias que, embora igualmente geraes, não constituem, quanto ao fundo, sinão consequencias ou transformações da primeira. E' sobre esta exclusivamente que recahirá aqui o defeito actual de generalidade de nossa theoria analytica, limitada aos recursos da algebra elementar; a maneira, porém, porque todas as outras lhe são subordinadas, será já tratada tão completamente quanto possivel; de sorte que a extensão ulterior do methodo das tangentes, com o auxilio de uma analyse mais elevada, poderá ser reduzido á questão principal, sem que seja necessario considerar especialmente as questões accessorias.

Segundo a nossa definição, si concebermos primeiramente pelo ponto dado (x', y'), uma recta que corte a curva em um segundo ponto (x'', y''), seu coefficiente angular será $\frac{y''-y'}{x''-x'}$: a indagação proposta consiste, pois, em achar o limite para que tende esta relação á medida que as coordenadas variaveis x'' e y'' approximam-se indefinidamente das coordenadas fixas x' e y'. Si estabelecessemos então a hypothese extrema, $x''=x', y''=y'$, esse coeficiente tornar-se-hia indetermidado, porque não attendeu-se ainda ás condições que removem o equivoco naturalmente inherente a esta coincidencia, e que resultam da situação continua dos dous pontos sobre a curva dada $f(x,y)=0$. Assim, a difficuldade do problema reduz-se essencialmente a esta questão puramente algebrica : utilisar as duas, equações de condição, $f(x',y')=0$ e $f(x'',y'')=0$, de modo a transformar a fracção $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, em uma outra equivalente que não possa mais tornar-se indeterminada, quando supposermos $x''=x'$ e $y''=y'$. Uma vez realisada esta transformação, a avaliação desta relação, para esta hypothese final, determinará immediatamente a expressão geral do coefficiente angular da tangente, propria á curva proposta.

Pg. 166

Supera-se esta difficuldade algebrica, subtrahindo as duas relações uma da outra, afim de pôr em evidencia, em cada parte desta relação composta,

$$f(x'',y'')-f(x',y')=0,$$

ou o factor $y''-y'$, ou factor $x''-x'$, de modo a desembaraçar

depois facilmente a relação procurada. Mas, para explicar convenientemente esta operação, naturalmente fundada sobre a divisibilidade conhecida de $a^m - b^m$ por $a - b$, é mister agora especificar a composição da equação proposta, que suppomos algebrica, racional e inteira, aliás de um grau qualquer. Mencionando apenas um unico termo geral de cada especie, seu typo será:

$$Ay^m + Bx^n + Cx^p y^q + D = 0,$$

de sorte que nossa relação composta torna-se

$$A(y''^m - y'^m) + B(x''^n - x'^n) + C(x''^p y''^q - x'^p y'^q) = 0.$$

A transformação proposta só offerece difficuldade quanto ao ultimo termo, que não é espontaneamente divisivel nem por $y'' - y'$, nem por $x'' - x'$. Ora, a natureza algebrica deste termo, em que entram as duas variaveis, suggere logo o artificio preparativo por meio do qual elle torna-se tão conveniente como os outros, considerando-o como fazendo vezes do complexo de dous termos distinctos, um analogo aos termos affectos de y, outro aos affectos de x, segundo a depomposição evidente

$$x''^p y''^q - x'^p y'^q = x''^p (y''^q - y'^q) + y'^q (x''^p - x'^p),$$

que transforma a relação primitiva em

$$A(y''^m - y'^m) + B(x''^n - x'^n) + Cx''^p (y''^q - y'^q) + Cy'^q (x''^p - x'^p) = 0.$$

Sendo agora todos os termos divisiveis ou por $y'' - y'$ ou por $x'' - x'$, deduz-se logo, por meio das regras conhecidas,

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{B(x''^{n-1} + x''^{n-2}x' + \ldots + x'^{n-1}) + Cy'^q (x''^{p-1} + \ldots + x'^{p-1})}{A(y''^{m-1} + y''^{m-2}y' + \ldots + y'^{m-1}) + Cx''^p (y''^{q-1} + \ldots + y'^{q-1})}$$

Sendo assim realisada a transformação proposta, basta então fazer $y'' = y'$ e $x'' = x'$ para que esta fracção determine immediatamente o coefficiente angular da tangente,

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{n\,Bx'^{n-1} + p\,Cy'^q x'^{p-1}}{mAy'^{m-1} + qCy'^{q-1}x'^p}.$$

Em logar de reter esta formula, ou de renovar a sua investigação especial em cada exemplo, convém aprehender algebricamente o modo de derivação de seus termos em relação aos da equação primitiva. Um primeiro exame comparativo mostra que os termos em x nesta equação só influiram no numerador deste resultado, e os termos affectos de y no denominador. Quanto aos termos

affectos de x e y, influiram em ambas as partes, mas sempre como unicamente relativos ora a x, ora a y. Vê-se em seguida que a derivação consistio em multiplicar, em cada termo de uma ou outra especie, o coefficiente pelo expoente e em diminuir este expoente de uma unidade. Tal é, pois, a lei geral segundo a qual o coefficiente angular da tangente resulta da equação rectilinea da curva correspondente, em todos os casos acima caracterisados.

Simplifica-se muito o seu enunciado e notação pelo uso elementar de uma grande noção analytica, cuja alta importancia geometrica vae ser em breve apreciada directamente, além de sua immediata efficacia como meio de expressão: é a das *derivadas* propriamente ditas. Este nome, tornado especial desde Lagrange, designa, em relação a qualquer funcção de uma só variavel, o coefficiente da primeira potencia do accrescimo da variavel no desenvolvimento do accrescimo da funcção segundo as potencias do da variavel. Quando a funcção contém duas variaveis, comporta naturalmente duas derivadas distinctas, desde que se considere a mudança exclusiva de cada uma dellas, tratando a outra como uma simples constante. De accôrdo com estas explicações, é facil reconhecer que a lei precedente póde assim enunciar-se: *o coefficiente angular da tangente é igual á relação, tomada com signal contrario, entre as duas derivadas do primeiro membro da equação proposta, relativas, uma á abscissa, outra á ordenada do ponto de contacto.* Com effeito, cada uma das partes da nossa formula de tang. α constitue evidentemente, segundo a definição precedente, a funcção derivada da parte correspondente da equação primitiva. Demais, como a derivada de uma somma equivale necessariamente á somma das derivadas de suas partes, é claro que a mesma lei da formação conviria tambem ao caso em que a equação encerrasse muitos termos de cada especie, tendo cada um participado separadamente do resultado como seu typo unico. Em breve reconheceremos que este enunciado definitivo da regra das tangentes não só constitue uma abreviação commoda e usual da lei algebrica acima obtida, mas tambem exprime já o modo o mais geral para a formação do coefficiente angular da tangente a uma curva qualquer, salvo a difficuldade de achar as derivadas da equação correspondente.

Quanto á notação analytica desta mesma regra, basta applicar tambem o modo eminentemente simples e luminoso introduzido por Lagrange para as funcções derivadas, modificando sómente com um accento as caracteristicas das funcções primitivas; de sorte que

$f'(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, etc., designam sufficientemente as derivadas respectivas de $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, etc. Para as funcções a duas variaveis, convém distinguir as duas derivadas, não seguindo o modo mui incerto que Lagrange tinha deduzido da deslocação do accento, mas com o auxilio de uma sorte de adjectivo analytico, que consiste em collocar como indice, um pouco abaixo da caracteristica, o nome da variavel considerada. Assim $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$ indicarão as duas derivadas de $f(x,y)$, uma relativa a x, e a outra a y. Desta maneira a nossa lei das tangentes poderá ser analyticamente formulada por esta expressão muito concisa, mas muito clara

$$\text{tang. } \alpha = -\frac{f'_x(x',y')}{f'_y(x',y')},$$

em que nenhuma das indicações essenciaes está realmente omittida. Poder-se-ha mesmo, depois de um habito sufficiente, augmentar familiarmente o seu laconismo, sem em nada alterar a clareza, fazendo apenas sobre o indice adjectivo a mensão especial do ponto de contacto, o que permittirá supprimir os parentheses, onde elle está mui pesadamente indicado. Assim escreveremos algumas vezes esta lei sob a forma rapida

$$\text{tang. } \alpha = -\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}},$$

em que nada poderia ser supprimido sem introduzir logo uma confusão radical.

40.—A este modo eminentemente elementar de estabelecer a regra das tangentes, creio dever juntar um segundo que, sem no fundo exceder demais as primeiras noções algebricas, permitte desde já demonstrar sufficientemente a inteira generalidade desta lei geometrica, sob a unica reserva das difficuldades analyticas que nos offereceria agora sua applicação effectiva, além dos casos que acabamos de considerar. Repousa elle sobre apreciação conveniente de um artificio encarado de ordinario como puramente especial, mas que, melhor julgado, pode facilmente tornar-se a base de um verdadeiro methodo geral. E' aquelle pelo qual acha-se commodamente o valor do coefficiente angular da tangente, quando o ponto do contacto está situado na origem das coordenadas, avaliando, na equação da curva

dada, a relação $\frac{y}{x}$ para $x=0$, o que o mais das vezes é muito facil.

Si, por exemplo, pela equação da cissoide

$$y^2 = \frac{x^3}{2r-x},$$

quer-se conhecer a direcção da sua tangente na origem, ter-se-ha

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{2r-x}}.$$

Assim, o limite da relação da ordenada para a abscissa indefinidamente decrescente é aqui 0, substituindo $x=0$, o que mostra a tangente então confundida com o eixo da curva, conforme o resultado já fornecido (26) pela definição.

Tal consideração pode evidentemente conduzir a achar a lei geral do coefficiente angular da tangente em um ponto qualquer, de uma curva; porque basta transpôr a origem para este ponto (x', y'), sem mudar aliás a direcção do eixo; o que obriga a mudar x em $x'+x$ e y em $y'+y$ na equação proposta $f(x,y)=0$, que então torna-se

$$f(x'+x, y'+y)=0.$$

Para achar assim a regra das tangentes, toda a difficuldade consiste em bem discernir quaes os termos desta nova equação, que devem ser tomados emconsideração, quando se avalia $\frac{y}{x}$ para $x=0, y=0$, affastando com cuidado os que, nenhuma influencia podendo exercer a este respeito, complicariam inutilmente esta apreciação analytica. Ora, é evidente que, desenvolvendo-se a equação segundo as potencias crescentes do x e de y sob a fórma

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+\ldots\ldots=0,$$

o termo A independente de x e de y, coincidindo espontaneamente com $f(x', y')$, achar-se-ha annullado segundo a hypothese indicada, e que, depois de ter em seguida dividido tudo por x, no intuito de introduzir a relação procurada, a equação, mudada em

$$B+C\frac{y}{x}+D\,x+E\,y+F\left(\frac{y}{x}\right)y+\ldots\ldots=0,$$

não conservará, quando se fizer $x=0, y=0$, senão os dous primeiros termos; de sorte que, no limite procurado, a relação $\frac{y}{x}$ será expressa por $-\frac{B}{C}$, sem de modo algum depender dos termos de grau

superior ao primeiro. Si agora approximarmos este resultado da precedente definição das derivadas, com um pouco de attenção reconheceremos facilmente, tendo sobretudo o cuidado de, para mais clareza, praticar sempre uma apoz outra as duas substituições primordiaes $x'+x$ e $y'+y$, que estes coefficientes B e C das primeiras potencias de x e de y constituem precisamente as derivadas respectivas do primeiro membro da equação primitiva em relação a x e a y, na qnal, bem entendido, se tivessem substituido as coordenadas geraes x, y pelas coordenadas especiaes x', y' do ponto de contacto. Assim fica directamente estabelecida a lei fundamental das tangentes, que, ainda ha pouco, não era mais do que um simples resultado de calculo, limitado então aos casos considerados, mas que d'ora em diante torna-se extensivo, ao menos em principio, a todas as equações possiveis, salvo a difficuldade puramente analytica de achar as derivadas convenientes.

41. — Só com os conhecimentos algebricos exigidos neste tratado, estas derivadas não poderão ser immediatamente formadas sinão para funcções algebricas propriamente ditas, racionaes e inteiras, ou, em outros termos, exclusivamente compostas de simples potencias das variaveis. Neste caso, pois, a derivação consistirá, sempre em multiplicar cada coefficiente pelo expoente correspondente e diminuir este de uma unidade, o que reproduzirá textualmente a formula obtida especialmente no numero precedente. Mas, comquanto sejão estes casos os unicos em que possamos aqui determinar immediatamente as tangentes, a lei fundamental desta theoria geometrica não deixa de ficar completamente estabelecida, não restando mais a desejar do que a extensão ulterior das noções analyticas sobre a formação effectiva das derivadas.

Quando as equações dadas, si bem que algebricas, forem irracionaes ou fraccionarias, nossa regra das tangentes poderá, mesmo em seu estado actual, tornar-se afinal applicavel, mas só depois das preparações mais ou menos peniveis destinadas a eliminar os denominadores e os radicaes. Si, por exemplo, tem-se a equação

$$y=\frac{1}{x}\pm\sqrt{x},$$

expellir-se-ha primeiro o denominador, escrevendo

$$xy = 1 \pm x\sqrt{x},$$

e depois o radical, isolando-o e quadrando, o que dará, depois de ter desenvolvido e transposto, a equação

$$x^2y^2 - x^3 - 2xy + 1 = 0.$$

Só então é que poderemos applicar immediatamente a regra das tangentes, de que resultará aqui

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{3x^2 - 2xy^2 + 2y}{2x^2y - 2x},$$

onde se poderá pôr, em lugar de y, seu valor dado pela equação primitiva, de maneira a obter afinal

$$\text{tang.}\,\alpha = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

Nos casos semelhantes, a imperfeição actual dos nossos conhecimentos analyticos sobre a applicação effectiva da regra das tangentes, consiste em não podermos obter directamente esta expressão definitiva, a que só poderemos chegar por um circuito algebrico mais ou menos laborioso, por não sabermos tomar immediatamente as derivadas das funcções propostas. Convem que o leitor sinta desde já, fazendo alguns exercicios espontaneos, estes diversos embaraços algebricos, que caracterisam, neste ponto, o estado de geometria analytica entre Descartes e Leibnitz, e cuja apreciação crescente foi um dos principaes estimulantes que levaram á invenção da analyse transcendente. As difficuldades relativas aos denominadores são sempre removidas, mas o mesmo não acontece com as suscitadas pelos radicaes. Si, como no exemplo precedente, podessemos sempre eliminal-os isolando-os successivamente, afim de eleval-os em seguida ás potencias correspondentes, tal preparação não seria muito penosa. Mas esta marcha apenas é plenamente efficaz para o caso de um só radical, e não applica-se a radicaes simultaneos, sinão quando são do segundo grau somente, e, ainda assim, é mister que não coexistam mais de cinco. Em qualquer outro caso, a suppressão dos radicaes exige a intervenção dos penosos methodos de eliminação proprios ás equações algebricas de um grau qualquer, e cujo emprego torna-se quasi sempre impraticavel.

Para, em muitas occasiões. facilitar a applicação da nossa regra das tangentes, convém emfim observar que, si a equação proposta é resolvida em relação a y sob a forma

$$y = \varphi(x)$$

simplifica-se a lei geral, ficando tang. $\alpha = \varphi'(x)$, pois que então a derivada relativa a y é 1. Assim o coefficiente angular da tangente é sempre exprimivel pela derivada da funcção que representa a ordenada, o que nos permitirá desde logo formal-o mais facilmente, quando esta funcção for da especie d'aquellas cujas derivadas sabemos achar actualmente.

A respeito deste principal problema, assim como das investigações secundarias que a elle se vão prender, é quasi superfluo advertir expressamente que todas as soluções relativas às tangentes conduzem com facilidade ás que se referem ás *normaes*, isto é, ás suas perpendiculares nos pontos de contacto. Com quanto esta nova forma de tal estudo possa aliás augmentar ás vezes, sob o aspecto algebrico, suas difficuldades especiaes, jamais exigirá nenhum novo principio geometrico.

42.— Estando sufficientemente tratada d'ora em diante a questão fundamental da theoria das tangentes, consideremos agora a maneira geral de prender-lhe successivamente, segundo sua complicação crescente, as diversas questões accessorias que podem ser encaradas ou como consequencias della, ou como transformações.

Primeiro, é preciso examinar o caso em que se pede uma tangente parallela a uma recta dada. Como é então conhecido o valor especial do coefficiente angular da tangente, trata-se de deduzir d'ahi reciprocamente as coordenadas correspondentes do ponto de contacto. A nossa regra fundamental, que somente é preciso aqui applicar a um destino inverso, fornece logo o meio de pôr o problema em equação. Si $f(x, y) = 0$ é a equação da curva dada, e $y = ax + b$ a da recta proposta, ter-se-ha assim, entre as coordenadas incognitas x', y' do ponto de contacto procurado, a relação

$$-\frac{f'_x(x', y')}{f'_y(x', y')} = a,$$

que, combinada com a condição necessaria $f(x', y') = 0$, determinará estas incognitas, sem que jamais a questão possa offe-

recer outras difficuldades, alem das da execução algebrica. Que trate-se, por exemplo, da curva $y^2=x^3$, e queira-se tirar-lhe uma tangente parallela á recta $y=x$, as equações serão, supprimindo os accentos por inuteis,

$$\frac{3x^2}{2y}=1, \text{ e } y^2=x^3,$$

donde resultará $x=\frac{4}{9}$ e $y=\frac{8}{27}$ para o ponto em que a tangente é inclinada de 45.° Quando o problema fôr impossivel, reconhecel-o-hemos assim, como de costume, achando coordenadas imaginarias, ou pelo menos infinitas si a direcção dada pertencer ao limite das tangentes de uma curva indefinida.

Supponhamos, em segundo logar, que seja pedida uma tangente passando por um ponto exterior dado. Invertendo ainda o problema fundamental, introduzir-se-hão as coordenadas desconhecidas do ponto de contacto, segundo as quaes a equação da tangente seria

$$y-y'=-\frac{f'_x(x',y')}{f'_y(x',y')}(x-x'),$$

que exige ainda que se exprima a condição de passagem no ponto dado (β, α), o que fornecerá a relação

$$\beta-y'=-\frac{f'_x(x',y')}{f'_y(x',y')}(\alpha-x')$$

para determinar, juntamente com a condição espontanea $f(x', y')=0$, as duas incognitas x' e y'. Na curva $y^2=x^3$ achar-se-hia assim x' e por conseguinte y', segundo a equação

$$x'^3-6\alpha x'^2+9\alpha^2 x'-4\beta^2=0,$$

que não pode mais apresentar sinão difficuldades de algebra.

43.— Consideremos agora uma terceira questão geral que, si bem que pareça puramente preparatoria, merece ser cuidadosamente separada, quer em rasão de sua importancia, quer em virtude do novo aspecto sob o qual leva a encarar o conjuncto da theoria das tangentes. Nesta questão propõe-se achar a relação constante entre o coefficiente angular e o coefficiente linear de toda recta $y=ax+b$ tangente a uma curva dada, inde-

pendentemente da posição particular do ponto de contacto. Uma vez obtida, poderá esta relação caracteristica concorrer indifferentemente para determinar, segundo os casos, ja a recta, ja a curva.

A principio pode-se encarar esta nova pesquiza como uma simples consequencia da questão fundamental. Com effeito, introduzindo ainda, a titulo de auxiliares provisorias, as coordenadas x', y' do ponto de contacto indeterminado, expremir-se-ha a coincidencia da recta proposta com uma das tangentes da curva $f(x, y)=0$, com as duas formulas de identificação

$$a=-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}, \quad b=y'+x'\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}.$$

Trata-se agora de eliminar x' e y' entre estas duas equações e a condição espontanea $f(x', y')=0$, o que ministrará a relação pedida entre a e b. Seja, por exemplo, a curva $y^2=x^3$, ter-se-ha

$$a=\frac{3x^2}{2y}, \quad b=y-\frac{3x^2}{2y},$$

e a eliminação dará facilmente $b=\frac{4a^3}{3\sqrt{3}}$, de sorte que a equação

$$y=ax+\frac{4a^3}{3\sqrt{3}}$$

representará o conjuncto das tangentes desta curva em quanto a ficar arbitrario, e successivamente cada uma dellas segundo os valores especiaes deste coefficiente angular.

Este modo de descobrir a condição procurada é por natureza tam geral quanto o methodo das tangentes de que deriva, e offerecerá mesmo o mais das vezes, alem desta plena generalidade intrinseca, menor difficuldade de execução do que outro qualquer. Emtretanto não é menos importante caracterisar com todo o cuidado um segundo, tão geral em principio como elle, ainda que de uma applicação de ordinario mais penivel e menos estensa. Independentemente da regra primitiva, est'outro modo poderá reciprocamente, segundo a intima connexão natural das duas questões, reproduzir a final seu equivalente essencial. E foi mesmo sob esta forma que Descartes creára analyticamente a theoria das tangentes. Si bem que, com justiça, tenha o uso levado a preferir a fórma, mais bem exprimivel, que explicamos em primeiro logar, este modo antigo conserva ainda, em certos

casos, alta utilidade scientifica, independentemente de sua importancia historica.

Elle repousa sobre o principio das raizes iguaes, immediatamente derivado da definição das tangentes. Si uma recta $y = ax + b$ toca uma curva $f(x, y) = 0$, a equação

$$f(x, ax + b) = 0,$$

que determina as abscissas dos pontos communs, deve então offerecer, entre duas de suas raizes, uma igualdade caracteristica que, formulada algebricamente, fornecerá a relação de a para b propria a distinguir toda tangente de uma simples secante. A obrigação de encarar apenas duas raizes iguaes resulta evidentemente da verdadeira noção das tangentes, em que só dous pontos devem ser combinados. Demais concebe-se algebricamente que um mais alto grau de multiplicidade estabeleceria entre a e b muitas relações, o que é manifestamente contrario ao espirito da questão, em que cada uma destas constantes, com quanto ligadas, deve de per si ficar indeterminada. Quando a igualdade de duas raizes arrastar a de maior numero, esta circunstancia necessariamente excepcional constituirá naturalmente o caracter analytico de certos pontos singulares.

Assim, estando toda a dificuldade reduzida a exprimir, na equação precedente, uma tal igualdade, é facil resolver esta questão analytica, independentemente de toda theoria especial de algebra, determinando como Descartes a condição de divisibilidade do primeiro membro desta equação em x, por um factor do segundo grau $(x - h)^2$, como fazia-se antes de ter nascido a theoria das raizes iguaes propriamente dita, e cuja intervenção ulterior será aliás de ordiuario muito menos favoravel á simplificação effectiva dos calculos, do que se costuma suppor. O meio mais natural, e quasi sempre mais commodo de formular esta divisibilidade caracteristica consiste, como sabe-se, em executar a divisão, para annular identicamente o resto do primeiro grau. Serão assim obtidas duas equações, entre as quaes precisará eliminar a indeterminada auxiliar h, que representa aqui a abscissa do ponto de contacto; o resultado desta eliminação constituirá a relação procurada. Operando deste modo sobre a curva $y^2 = x^3$, achar-se-ha, embora com mais difficuldade, a condição acima obtida.

Com quanto o principio deste segundo methodo comporte evidentemente inteira generalidade, sua expressão analytica é essen-

cialmente limitada às equações algebricas propriamente ditas, depois mesmo de tornadas d'ante-mão racionaes e inteiras. Pois que, n'uma equação transcendente on simplesmente irracional, não saberiamos hoje como descobrir directamente a condição de igualdade de duas raizes. Assim, o primeiro methodo, ulteriormente applicavel a todas as equações, é em geral preferivel, si bem que o leitor não possa actualmente empregal-o, sinão com as mesmas restricções que para o segundo. Todavia elle merece acurado estudo, pondo de parte a importancia geral do principio correspondente, por causa das facilidades analyticas que algumas vezes apresenta, apezar de ser, tudo o mais compensado, habitualmente mais penivel. Elle offerece alem de tudo uma grande vantagem nas curvas do segundo grau, pois que a condição de igualdade é então expressa immediatamente por uma formula muito elementar, sem exigir nem a divisão, nem sobretudo a eliminação subsequente, as quaes constituem os maiores embaraços algebricos deste methodo.

De qualquer modo que seja tratada, esta importante questão do contacto indeterminado dá-nos logo o meio de pôr em equação o problema geral de geometria, que consiste em tirar uma tangente commum a duas curvas dadas; pois que, formulando assim cada uma das condições do problema, estabecer-se-hão as duas equações proprias a determinar os coefficientes angular e linear da recta procurada. Por exemplo, si fôr pedida a tangente commum ás duas curvas

$$y^2=x^3, y^2+x^2=1,$$

ter-se-ha a principio, para a primeira a condição de contacto já obtida, $b=\frac{4a^3}{3\sqrt{3}}$; quanto á outra, convem evidentemente preferir o segundo methodo que afinal dará a condição $b^2=a^2+1$. Taes são, pois, neste caso as duas equações do problema, nas quaes eliminando-se b, dependerá tudo emfim da equação

$$16a^6-27a^2=27,$$

reductivel ao terceiro grau e que comportará, conforme a figura, só um par de válores reaes de a.

Contactos

44.—Passemos agora á mais vasta e difficil destas questões accessorias, procurando a principio, pela generalisação do problema precedente, a condição analytica de um contacto indeterminado entre duas curvas quaesquer. Mas é mister antes de tudo, e é nisto que consiste em principio a unica difficuldade

desta nova investigação, é mister, digo, caracterisar cuidadosamente o que constitue o contacto de duas curvas.

Nada impede sem duvida de estender a uma linha qualquer a definição do n. 38, relativa á tangente propriamente dita, concebendo, por exemplo, um circulo passando por dous pontos distinctos da curva dada, e considerando o limite para que elle tende, quando o ponto movel approxima-se indefinidamente do ponto fixo. Existe porém evidentemente entre os dous casos esta differença radical— que, sendo uma recta determinada por dous pontos, ao passo que o circulo não o é, este limite será essencialmente preciso para aquella, e ao contrario vago, sem ser arbitrario, para este. Poder-se-hia, por exemplo, escolher á vontade o raio do circulo, e então só a situação extrema d'elle ficaria tão determinada quanto a da recta. Si, em vez de um circulo, considerassemos uma parabola, cuja determinação exige mais um ponto, o limite de uma tal relação seria ainda mais indeterminado, e assim por diante para as curvas cujo numero de pontos determinante crescesse pouco e pouco. Este modo primordial de definir o contacto de duas curvas, por uma imitação servil do que convem á linha recta, constitue, pois, uma noção geometrica necessariamente imperfeita e mesmo confusa, para casos differentes do que foi fornecido pelo typo espontaneo. O uni o meio geral de completar convenientemente uma tal noção, imprimindo-lhe sempre um caracter semelhantemente determinado, consiste, segundo a grande concepção de Lagrange, em imitar mais judiciosamente a definição inicial, substituindo em cada caso o numero dous de pontos coincidentes pelo que corresponde á inteira determinação da linha introduzida, tres quanto ao circulo, quatro á parabola, etc. E' assim que, como todas as outras idéas scientificas, a idéa de contacto, a principio absoluta porisso que não se lhe tinha appreciado sinão um caso, torna-se essencialmente relativa, e comporta diversos graus de plenitude, de ordinario qualificados de *osculações*. Mas esta maneira, em verdade a unica philosophica, de conceber com Lagrange a theoria geral dos contactos das curvas, apenas esboçada em certos casos pela analyse ordinaria segundo o modo abaixo indicado, não pode ser convenientemente seguida sinão pela analyse transcendente. Devemos, portanto, depois de ter assentado aqui o principio geometrico em que basêa-se, enviar para a geometria transcendente a sua constituição analytica, e limitar-nos por ora a considerar nas curvas esse grau elemen-

tar de contacto, já familiar a respeito da linha recta, e o unice plenamente accessivel á preparação analytica exigida ao leitor neste tratado.

Asssim concebida, a busca da relação, agora tão unica quanto no numero precedente, que exîste entre as constantes arbitrarias de duas curvas

$$f(x, y)=0, \quad \varphi(x, y)=0,$$

em virtude de um contacto indeterminado, torna-se logo uma consequencia natural da nossa questão fundamental; porque resulta evidentemente das definições respectivas que as duas curvas têm desde então em um mesmo ponto uma tangente commum. Introduzindo, pois, como auxiliares as coordenadas x e y do ponto de contacto, deverão ellas verificar, alem das duas equações propostas, a condição

$$\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$$

que exprime, em vista disso, a coincidencia das duas tangentes. Por conseguinte, si entre estas trez equações eliminam-se estas coordenadas, obter-se-ha finalmente a relação procurada. Sirva de exemplo achar a ligação entre a e b propria a tornar a curva indeterminada

$$xy=ax+by$$

tangente á curva determinada

$$y^2=x.$$

Deve-se, pois, eliminar x e y entre estas duas equações e a relação

$$\frac{1}{2y}=\frac{a-y}{x-b}.$$

Esta dá logo $x=b+2ay-2y^2$ que, substituida em $y^2=x$, fará achar fa ilmente y, e por eonseguinte x, em a e b : basta portanto pôr estas expressões na primeira equação para achar-se afinal a relação $b=-\frac{1}{4}a^2$.

Aqui, como no numero precedente, a questão comporta evidentemente um segundo modo de solução, pelo principio das raizes iguaes. Uma vez eliminado y entre as duas equações propostas, bastará formular do mo lo acima a ignaldade de duas raizes

nesta equação final propria ás asbcissas dos pontos communs. Para as curvas que acabam de ser consideradas, ter-se-hia, segundo a primeira, $y = \frac{ax}{x-b}$, e a equação final seria

$$x^2-(a^2+2b)x+b^2=0,$$

que reproduz com facilidade a relação já obtida pelo outro methodo. A applicação habitual deste segundo modo daria logar a uma simples extensão das reflexões sufficientemente indi adas no numero anterior para com os contactos rectilineos.

A principal propriedade theorica deste ultimo methodo consistiria em permittir-nos desde já caracterisar analyticamente, nos casos em que elle é applicavel, os diversos graus de contacto, cuja apreciação geometrica em tempo estabeleci. Porque o princip o das raizes iguaes só necessita, para isso, de uma sufficiente extensão, considerando-se então a igualdade não já somente entre duas raizes da equação final, mas entre tres, quatro, etc., segundo a divisibilidade por $(x-h)^3$, ou $(x-h)^4$, etc., conforme se procurasse ou o circulo, ou a parabola, etc., susceptivel do mais intimo contacto possivel com a curva dada. Facil é sentir que assim se obteriam sempre tantas equações quantas fossem necessarias para determinar a curva *osculadora*, salvo uma só constante arbitraria que serviria para fazel-a passar em seguida, si se julgasse conveniente, por um ponto particular. Mas, para este fim, a analyse transcendente ministrará ulteriormente meios muito mais commodos, mesmo para com as curvas algebricas a que convem exclusivamente o modo que acabo de indicar.

Voltando ao simples contacto ordinario formulado por uma só relação, concebe-se que as condições deste genero poderão d'ora em diante contribuir para a determinação das curvas conjunctamente com sua passagem em certos pontos, unico phenomeno geometrico cuja expressão analytica era-nos prim tivamente possivel; aliás esta participação será sempre sujeita á theoria fundamental do capitulo precedente, que acaba assim de receber sua primeira extensão geral. Será agora facil, quando o numero dos contactos, rectilineos ou curvelineos, fôr julgado sufficiente, pôr em equação este problema geometrico mui extenso e difficil, resultado definitivo da nossa theoria das tangentes: determinar uma curva de especie dada, tangente a certas curvas inteiramente dadas. Com quanto as relações assim obtidas para calcular os

parametros desconhecidos da curva procurada devam muitas vezes ser inextricaveis, mesmo no caso de um circulo tangente a tres curvas pouco complicadas, tal consideração não é menos eminentemente propria a fazer dignamente apreciar a admiravel generalidade que têm adquirido as especulações geometricas, sob um judicioso ascendente das concepções analyticas, em virtude da grande renovação cartesiana.

Maximos e minimos

45. — Depois de ter explicado sufficientemente a theoria das tangentes, resta-nos a considerar um exemplo caracteristico que ella offerece-nos — da aptidão natural das concepções geometricas para aperfeiçoar por seu turno as especulações analyticas, facilitando, por uma luminosa representação, a descoberta dos principios essenciaes, como deixei, em geral, indicado no começo deste tratado. Refiro-me á importante determinação dos *maxima* e *minima* para as funcções de uma só variavel, de que aliás, a diversos respeitos, teremos em breve necessidade, e que esta feliz intervenção vai já permittir-nos estender a casos muito mais variados e difficeis do que parecem comportar os conhecimentos analyticos puramente elementares exigidos ao leitor. Mas, antes de tudo, convem caracterisar com cuidado a natureza geral desta investigação, e mesmo resumir em seguida summariamente os meios d'ante-mão fornecidos a este respeito pela analyse ordinaria.

As denominações em uso são muito proprias a bem recordar em que consiste este genero de questões, porque indicam uma idéa de maior ou menor valor, que, convenientemente definida, distingue com effeito estes estados notaveis. Uma função não comportaria realmente nem *maximum* nem *minimum* si fosse sempre crescente ou sempre decrescente á medida que a sua variavel augmenta, quando mesmo tendesse indefinidamente para um limite assignavel. Si, porém, como na mór parte dos casos reaes, a funcção é ora crescente, ora decrescente, cada passagem de um a outro sentido será marcada por um estado *maximum*, quando a funcção cessa de augmentar para começar a diminuir, ou por um *minimum* no caso contrario. Estes estados criticos são pois alternativos, de sorte que todo *maximum* cae entre dous *minima*, e todo *minimum* entre dous *maxima*. Vê-se assim que o valor maximum de uma funcção é, com effeito, o maior, não de todos absolutamente, o que é muito raro, mas

só desde o minimum precedente até ao minimum seguinte, e da mesma sorte para o valor minimum. E' por isso que o uso tem consagrado aqui o emprego das denominações latinas, cuja traducção litteral indicaria uma definição viciosa.

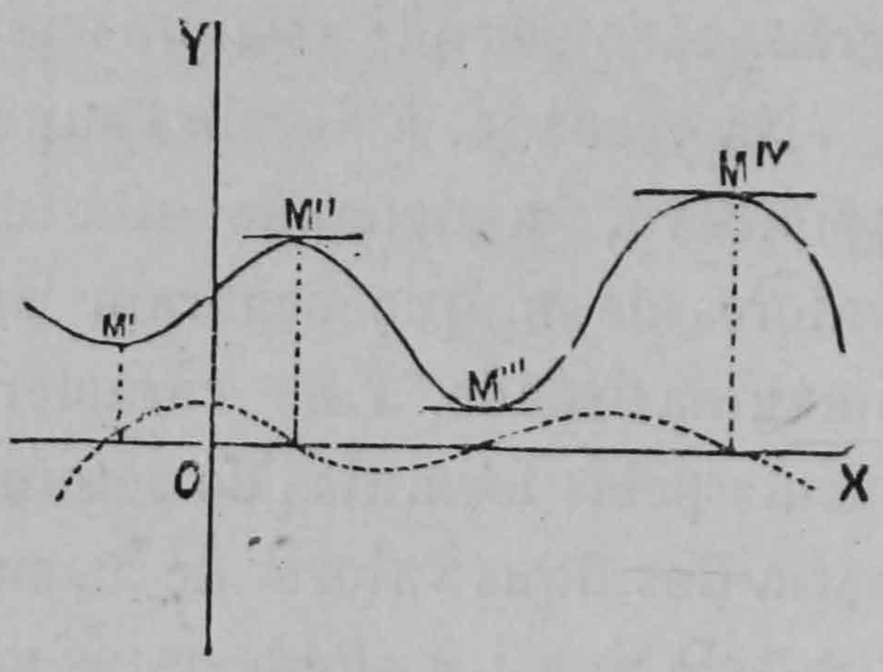
Desde a origem das especulações mathematicas abstractas ou concretas, taes pesquizas apresentam-se frequentemente. Mas a analyse ordinaria não fornece a este respeito sinão recursos pouco extensos. Sua marcha propria consiste então em tratar a questão do maximum ou minimum de cada funcção $f(x)$ como um caso particular da questão que consistiria em fazer-lhe adquirir um valor qualquer n. Desde então, se fôr possivel resolver algebricamente a equação $f(x)=n$, a discussão da formula $x=\varphi(n)$ indicará os limites de n, aquém ou além dos quaes x cessasse de ser real, e por consequencia ter-se-hão tambem os valores correspondentes de x. Ainda que, este principio seja sem duvida plenamente geral, a extrema imperfeição da resolução algebrica das equações limita infinitamente o seu uso, quando a equação proposta excede os quatro primeiros graus ; este meio elementar não é mesmo verdadeiramente usual, sinão quando ella não excede ao segundo grau, caso em que este processo é de ordinario o mais commodo.

Na verdade, a algebra superior aperfe çôa muito este methodo primitivo, assignando um caracter directo e especial para os valores de n que separam assim, quanto a x, a realidade da imaginariedade. Este caracter, a principio indicado espontaneamente pelas formulas do segundo grau, consiste na igualdade necessaria dos dous valores de x, susceptiveis de tornarem-se ora reaes, ora imaginarios. Póde-se, com effeito, conceber em geral, segundo a natureza da questão, que o estado de igualdade, correspondente ao maximum ou minimum, distingue sempre esta passagem da realidade para a imaginariedade. Basta, para isto, notar que a funcção retoma necessariamente, depois do maximum ou do minimum, os mesmos valores que antes, com ou sem symetria. Assim, emquanto o valor n não é o maximum ou o minimum, correspondem-lhe dous valores d stinctos de x si elle é possivel, e este par torna-se imaginario si elle está fóra do l m te ; no Í mite mesmo, estes dous valores coincidem, por isso que o estado de n é então unico. Segundo esta consideração fundamental, o maximum ou o minimum de n acha-se portanto caracterisado directamente pela propriedade de fazer a equação $f(x)-n=0$ adquirir duas

raizes iguaes, o que permitte á analyse ordinaria determinar estes valores principaes, sem ter de modo algum necessidade de resolver esta equação, limittando-se a formular nella, como indiquei acima, a igualdade de duas raizes. Dividir-se-ha, pois, seu primeiro membro por $(x—h)^2$, e o resto, identicamente annulado, fornecerá duas equações tendentes a determinar n e ao mesmo tempo h que, longe de ser um auxiliar superfluo, constitue precisamente o valor procurado de x.

Porém, por precioso que seja em si mesmo um tal progresso do methodo primittivo fornecido pela analyse ordinaria para a determinação dos maxima e minima, acha-se elle naturalmente limitado ás funcções algebricas ao mesmo tempo racionaes e inteiras. Ora, a intervenção das curvas vai permittir-nos ir já muito mais longe, além de que é d'ella que emana historicamente a primeira noção geral do principio precedente, apezar de poder-se hoje concebel-o de uma maneira puramente abstracta.

Imaginemos, pois a função $f(x)$ representada pela ordenada y de uma curva de que x é a abscissa (*fig. 33*). A simples inspecção geral de um tal quadro faz logo reconhecer um caracter proprio a determinar directamente os pontos M', M'', M''', etc., em que a curva, antes ascendente, torna-se descendente, ou reciprocamente, considerando a marcha correspondente das tangentes. Em quanto a curva sóbe, a



(Fig. 33)

tangente faz com o eixo um angulo agudo; este angulo é pelo contrario obtuso, quando a curva desce: ora, na passagem de um ao outro curso, no instante preciso do maximum ou do minimum, o angulo é 0° ou 180° e a tangente fica parallela ao eixo. Assim, a pesquiza destes pontos entra na questão acima tratada (41) em que procura-se tirar a uma curva dada uma tangente parallela a uma recta dada. Obter-se-hão, pois, os valores de x proprios ao maximum ou ao minimum, annullando o coefficiente angular da tangente, o qual é aqui $f'(x)$. As noções de algebra suppostas neste tratado não permittirão a formação directa desta equação caracteristica $f'(x)=0$, senão quando a funcção proposta fôr não só algebrica, mas ainda racional e inteira.

Mas, além de ficar assim completamente descoberta a regra fun-

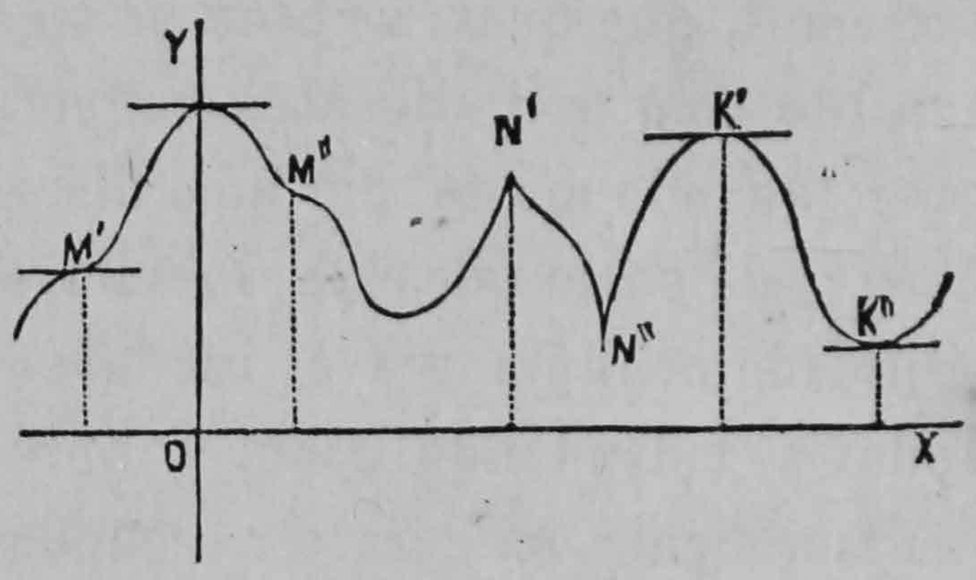
damental, salvo os conhecimentos analyticos exigidos para a sua applicação total, ja poderemos utilisal-a, como a lei das tangentes donde deriva, nas funcções fraccionarias ou mesmo irracionaes, depois das preparações mais o menos peniveis, cuja necessidade provisoria temos rcconhecido em caso identico.

Philosophicamente, um tal caracter é tanto mais conveniente, quanto constitue a expressão directa de uma observação geral, frequentemente suggerida pelos diversos phenomenos naturaes que apresentam exemplos familiares de maximum ou de minimum, taes como as mudanças de altura do sol no curso do dia, a desigual duração dos dias e das noites nas differentes estações, etc. Em todos os casos semelhantes, os observadores judiciosos têm sempre sentido que o estado de maximum ou de minimum distingue-se espontaneamente dos estados anteriores ou posteriores por uma especie de estação especial, que recordam algumas vezes as denominações consagradas, sobretudo quanto ás estações do anno. Ora, esta disposição estacionaria é felizmente expressa segundo o nosso methodo geometrico, que indica então a direcção da curva como parallela ao eixo.

Com quanto este caracter fundamental e a regra analytica correspondente devam igualmente convir ao maximum e ao minimum, não ha a temer que se fique exposto a confundir estes dous casos extremos, que quasi sempre se separarão sem difficuldade, quer de accordo com as indicações suggeridas pela natureza da questão, quer, quando muito, por uma discussão summaria dos valores visinhos ; de sorte que esta inevitavel coexistencia não constitue na realidade nenhum grave inconveniente do methodo precedente. Todavia, estendendo mais a apreciação geometrica, descobrir-se-hia facilmente um caracter secundario proprio a distinguir o maximum do minimum. Notamos, ha pouco, que a marcha da tangente é inversa de um caso a outro, pois que, no primeiro, sua inclinação passa de aguda a obtusa, em quanto que no segundo, dà-se o contrario ; por conseguinte o coefficiente angular de positivo torna-se negativo, e depois reciprocamente. Si, pois, imaginarmos uma curva auxiliar $y=f(x)$ tal que este coefficiente venha a ser sua ordenada, cortará ella o eixo nos diversos pontos procurados, mas descendo — para o maximum, e subindo — para o minimum, como o indica a parte pontuada da figura. A distincção pedida consistirá, por consequencia, em dever a tangente a esta segunda curva fazer com um eixo um angulo obtuso no

caso do maximum e agudo no caso do minimum; assim seu proprio coefficiente angular, naturalmente expresso pela segunda derivada da funcção proposta, será negativo no primeiro caso, e positivo no segundo. Poder-se-hia mesmo, repetindo o emprego deste artificio geometrico, apreciar tambem a hypothese intermediaria, em que $f'(x)$ devia annular-se, si não conviesse restringir aqui esta theoria ao que ella offerece de verdadeiramente essencial.

46.— Em fim, para melhor sentir a este respeito o quanto póde a geometria esclarecer a analyse, convém notar que a consideração das curvas indica-nos espontaneamente a dupla imperfeição radical apresentada necessariamente pelo methodo precedente, a qual aliás de nenhum modo altera a importancia d'elle aos olhos dos bons espiritos que, por uma tendencia hoje mui rara, reconhecem a impossibilidade necessaria de jamais fazer quaesquer das nossas regras, mesmo as analyticas, adquirirem uma perfeição absoluta. A principio, o caracter assim indicado pela equação fundamental, tang. $\alpha=0$, $f'(x)=0$, não pertence exclusivamente aos pontos em que a ordenada é maximum ou minimum; mas poderia tambem convir a pontos de inflexão taes como M', M" (*fig. 34*) si a curva estivesse convenientemente disposta. Este caso é tanto mais possivel quanto, como indica a *fig.33*, ha sempre alguma inflexão entre cada maximum ou minimum e os minima ou maxima que o comprehendem, e



(Fig. 34)

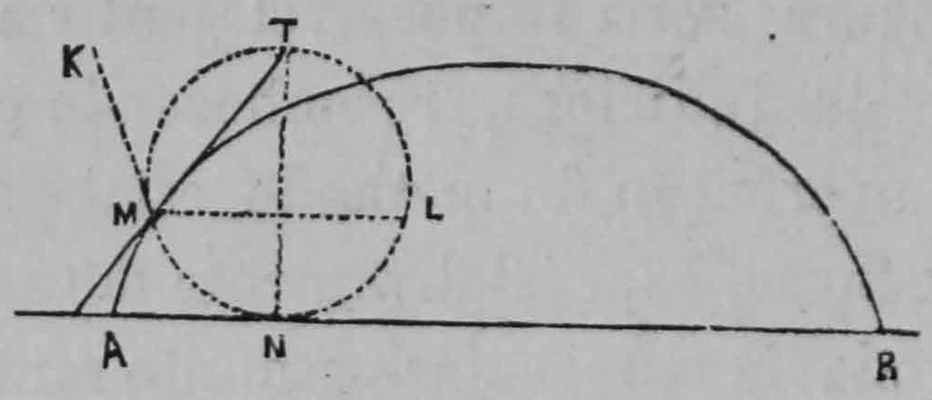
nada impede que o eixo possa ser collocado parallelo á tangente correspondente, com quanto esta coincidencia deva ser excepcional. Sob este aspecto, a equação $f'(x)=0$ póde, pois, conter raizes estranhas á questão proposta, cuja concurrencia exigirá, em cada caso semelhante, uma discussão especial, mais ou menos penosa. Porém, um inconveniente muito mais grave deste caracter fundamental consiste em peccar por desfalque, como o revela claramente a consideração geometrica, suppondo uma curva susceptivel de reversão sem que, entretanto a ordenada seja multipla. Como em K' e K" (*fig. 34*), esta é certamente um maximum ou minimum em N' e N", mas então a tangente já não é parallela ao

eixo como n'aquelles pontos, e sim perpendicular. Para garantir aos methodos analyticos uma perfeição absoluta, necessariamente interdita a quaesquer das nossas concepções, tem-se em vão imaginado distincções sophisticas, segundo as quaes não haveria maximum ou minimum em N' e N". Mas, é claro que a definição abstracta destes dous estados convém tão litteralmente a essas duas ordenadas como ás de K' e K"; e tanto assim que sem a figura seria impossivel sentir a diversidade dos dous casos. E' mais judicioso, reconhecendo com franqueza, a este respeito, a imperfeição do methodo estabelecido, notar que as curvas deste genero, especulativamente tão admissiveis como as outras, devem todavia apresentar-se muito raras vezes na expressão geometrica das leis naturaes, por isso que as mudanças bruscas, si bem que possiveis, são muitissimo excepcionaes em relação a todas as ordens reaes de phenomenos, o que, no fundo, deve tornar pouco lamentavel tal imperfeição.

47.— Antes de abandonar o estudo das tangentes, creio dever caracterisar em resumo o methodo historicamente notavel, pelo qual Roberval, combatendo com cega obstinação a grande renovação cartesiana, deu, a seu modo, um testemunho involuntario da necessidade de generalisação, que então preoccupava o espirito mathematico, tentando um esforço, mais estimavel do que feliz, para constituir, sem recorrer ás concepções analyticas, uma theoria geral das tangentes.

Este methodo consiste em conceber o movimento do ponto que descreve a curva proposta, como continuamente decomponivel em dous outros, cujas direcções e velocidades relativas sejam exactamente assignaveis. Então, a tangente torna-se, segundo a lei dos movimentos compostos, a diagonal do parallelogrammo construido, segundo aquellas direcções, por lados proporcionaes ás duas velocidades. Por exemplo, a primeira definição da ellipse (19) mostra que o ponto descrevente tanto afasta-se de um dos pontos fixos. quanto se approxima do outro. Concebamol-o attrahido por um delles e repellido pelo outro com forças iguaes, e a regra de Roberval assignará logo para tangente a bissectriz do angulo que faz uma das rectas com o prolongamento da outra, o que veremos depois conformar-se com os resultados analyticos. Si se tratasse da hyperbole, esta consideração iudicaria a propria bissectriz, do angulo das duas distancias, pois que então estas augmentariam ou diminuiriam ao mesmo tempo e, demais, sempre

igualmente. Quanto á parabola, o methodo de Roberval com facilidade levaria, segundo a definição do n. 20, á bissectriz do angulo formado pelas duas distancias constantemente iguaes. Em fim, para citar tambem uma curva transcendente, á qual é aliás historicamente admiravel que Roberval tenha podido applicar convenientemente a sua regra, consideremos a cycloide ordinaria (*fig.35*) em que, segundo a geração já citada, o ponto descrevente M é naturalmente animado de dous movimentos, um de translação — parallelamente á base A B, outro de rotação — no sentido da tangente M K ao circulo correspondente. Pois que o arco M N é constantemente igual á distancia A N, os dous movimentos elementares ainda têm aqui a mesma velocidade; a tangente deve, pois, coincidir com M T, bissectriz evidente do angulo K M L.



(Fig. 35)

As felizes applicações que ás vezes comporta este methodo não devem trazer nenhuma illusão sobre sua generalidade propria, que não poderia realisar-se sinão com o recurso das concepções analyticas, de modo a reproduzir sob outra forma, nossa regra primitiva das tangentes, sem que a intervenção dessas considerações dinamicas lhe tivesse de modo algum melhorado a formação. Com effeito, imaginando assim o ponto descrevente animado, em geral, de dous movimentos, horizontal e vertical, a difficuldade de estimar a relação das velocidades consistirá sempre em determiuar abstractamente o limite da relação entre o acrescimo da ordenada e o da obscissa, á medida que a segunda posição do movel approxima-se indefinidamente da primeira. Na verdade, si o movimento pode ser supposto uniforme n'um sentido, horizontalmento por exemplo, não poderia sel-o tambem verticalmente, salvo si o trajecto fosse rectilineo, o que obrigará, para medir a velocidade correspondente, a considerar a elevação vertical de um ponto que tende a confundir-se com o ponto dado. Recae-se, pois, assim necessariamente e por uma concepção mais penosa, por isso que menos directa, neste problema analytico que sempre constituirá a difficuldade fundamental da theoria geral das tangentes: « avaliar o limite para que tende a relação da differença das ordenadas á das abscissas, entre dous pontos de uma curva dada, um dos quaes approxima-se indefinidamente do outro.

Não convém, de resto mencionar este methodo de Roberval sem assignalar cuidadosamente os graves erros que póde determinar sua applicação irreflectida. Considerando, por exemplo, a definição do circulo (21) como o logar de um ponto cujas distancias a dous pontos fixos estão em uma razão constante, parece que esta regra designa para a tangente, tão claro como nos casos já citados, a diagonal do parallelogrammo construido sobre estas duas distancias, e entretanto é facil reconhecer que esta construcção seria inteiramente falsa. Da mesma sorte, a definição commum ás tres secções conicas (23) pareceria tambem indicar uma tangente dirigida segundo a diagonal do parallelogrammo determinado pelas duas distancias constantemente proporcionaes; e contudo, este resultado, exacto para a parabola, seria de certo erroneo para a ellipse e para a hyperbole. Estes exemplos bastam para mostrar que o methodo de Roberval, além da inaptidão evidente para uma verdadeira generalisação, não se tornaria mesmo rigoroso, sinão mediante certas precauções, a cerca das quaes quem desejar uma apreciação mais completa, pode com utilidade consultar o trabalho especial do Sr. Duhamel, em que este assumpto acessorio está escencialmente esgotado. Seria superfluo insistir ainda mais sobre uma concepção que em verdade, hoje só offerece interesse historico.

CAPITULO III

THEORIA DAS ASYMPTOTAS

48.— Este termo é naturalmente destinado a qualificar duas linhas quaesquer, que tendam de continuo uma para a outra, de modo a approximarem-se tanto quanto se quizer, sem que, no emtanto, jamais possam tocar-se. E', porém, quasi sempre empregado como substantivo, para designar sobretudo as rectas que apresentam, para com certas curvas, uma tal relação. Com effeito, as asymptotas rectilineas são as unicas, cuja determinação pode contribuir muito para fazer conhecer melhor as curvas correspondentes. São directamente proprias a dissipar toda incerteza sobre o sentido da curvatura de uma curva, pois que, a partir do ponto em que se caracterisa a tendencia, isto é, desde a ultima

sinuosidade, a curva deve sempre ser convexa para o lado da asymptota. Na verdade, a curva que se aproximar indefinidamente de uma recta voltando-lhe sua concavidade, não poderá deixar de atravessal-a.

Alem deste motivo fundamental para assim restringir a pesquiza das asymptotas, importa reconhecer que esta questão, encarada em toda a sua extensão, seria de natureza muitissimo vaga para jamais comportar solução verdadeiramente geral. De facto, podendo sempre duas linhas asymptotas de uma terceira sel-o tambem uma da outra, todas as curvas susceptiveis de asymptotas rectilineas devem ser, por isso mesmo, dispostas de tal maneira, que cada uma seja asymptota das outras, fazendo-se coincidir convenientemente suas respectivas asymptotas. Não poderia, pois, haver um typo de equação assaz geral para abraçar realmente todas as asymptotas curvilineas de uma curva dada, por isso que ellas devem necessariamente achar-se por entre as curvas algebricas de todos os graus possiveis, e tambem entre as curvas transcendentes de todas especies. Si algumas vezes tem-se acreditado possuir methodos analyticos proprios a tal destino, é certamente por não se ter assaz comprehend do a extensão nessaria de tal questão. A pesquiza não pode tornar-se sufficientemente precisa, sinão quando se especifica em que sorte de curvas ou em forma de equações se escolhem as asymptotas. Ora, assim concebida. a determinação das asymptotas curvilineas resulta naturalmente, ao menos no que pode apresentar de verdadeiramente util, da theoria das asymptotas rectilineas, como se reconhecerá no fim deste capitulo.

Sendo, pois, esta ultima theoria a unica que, por este duplo titulo, nos deve occupar essencialmente, convem agora explicar os dous methodos mui distinctos, com quanto necessariamente equivalentes, que comporta a sua instituição, quer segundo a theoria das tangentes, quer independentemente d'ella. Mas, antes de tudo, para evitar discussões superfluas, convem observar que as asymptotas parallelas aos eixos coordenados podem a principio ser especialmente obtidas sem difficuldade, do que nos offerece alguns exemplos espontaneos a primeira parte deste tratado, reconhecendo, quasi ao simples exame da equação proposta, que uma das variaveis torna-se infinita para um certo valor finito da outra; tendo-se, porém, em vista a reserva das explicações que mais abaixo darei, sobre o verdadeiro sentido geral desta condição analytica.

49.—Aproximando-se convenientemente a definição das asymptotas á das tangentes, sente-se com facilidade que toda asymptota constitue o limite necessario de uma serie correspondente de tangentes, ou, em outros termos, pode ser encarada como uma tangente cujo ponto de contacto tem-se afastado ao infinito. Com effeito, ao mesmo tempo que este ponto se aproxima assim da asymptota, a direcção da tangente, determinada pela coincidencia final que a caracterisa, tende evidentemente a confundir-se tambem com a da asymptota; notando-se que não se deve applicar tal comparação, sinão a partir da ultima sinuosidade em que realmente começa a manifestar-se o asymptotismo. Tal é o principio eminentemente simples e geral do primeiro methodo das asymptotas, unico plenamente universal, porisso que comporta naturalmente a mesma extensão que o das tangentes, de que apenas offerece uma nova applicação. Assim, vê-se que, para determinar o coefficiente angular e o linear proprios á asymptota, basta suppor infinitas as coordenadas do ponto de contacto nas duas formulas relativas a uma tangente qualquer, conforme o capitulo precedente,

$$a=-\frac{f'_x}{f'_y},\quad b=y+x\,\frac{f'_y}{f'_x}.$$

Os valores correspondentes de a e b farão conhecer a existencia, o numero e a situação das asymptotas procuradas. Quanto ao caso de impossibilidade, importa fazer distincção, segundo o espirito da questão, entre as curvas fechadas e as indefinidas. Quanto ás primeiras, si, por engano, se proseguisse uma pesquiza evidentemente contraria á natureza d'ellas, este calculo advertil-o-hia machinalmente, attribuindo a a e b valores imaginarios, pois que a supposição de ser infinita uma das variaveis tornaria a outra imaginaria. Mas, a respeito das curvas indefinidas, unicas que comportam razoavelmente tal estudo, o valor extremo de a não poderia ser imaginario, nem, por conseguinte, o de b, porque, tenha a curva asymptotas ou não, existe então um limite necessario da direcção das tangentes, que aliás é sempre util conhecer. A existencia ou a ausencia das asymptotas será, pois, annunciada pela coherencia ou pela incompatibilidade entre estes valores reaes de a e de b: em termos mais precisos, as

asymptotas obliquas serão assim indicadas ou interdictas, segundo fôr b finito ou infinito.

Si, no uso deste methodo, encontrarem os principiantes alguma difficuldade em calcular directamente as hypotheses $x=\infty . y=\infty$, poderão illudil-a facilmente tendo a precaução algebrica de transformar previamente x e y em $\frac{1}{t}$ e $\frac{1}{u}$, afim de suppor em seguida $t=0$ e $u=0$, quando a formula estiver assim convenientemente preparada. O habito deste expediente acabará demais por indicar espotaneamente o meio de dispensal-o, fazendo para logo resaltarem os principios relativos á substituição directa do infinito, a qual, se bem que menos simples que a do zero, consiste essencialmente em não conservar em cada formula algebrica, sinão o termo do mais alto grau.

Este primeiro methodo das asymptotas não offerece verdadeiramente outro grave inconveniente analytico, além da mui frequente difficuldade de assim discernir os valores extremos de a e de b, que por vezes apresentar-se-hão sob uma forma a principio indeterminada, quer seja $\frac{0}{0}$, quer $\frac{\infty}{\infty}$, quer outro qualquer symbolo equivalente. Em verdade, a analyse transcendente fornece em seguida processos proprios a completar uma tal solução dissipando quasi sempre semelhante equivoco. Mas, além de que a obrigação de recorrer a ella complica então a determinação, os poucos conhecimentos algebricos que aqui exijo do leitor, vedam-nos empregal-a, de sorte que esta imperfeição natural deve actualmente difficultar muito a applicação deste methodo, em virtude do pequeno alcance dos artificios que, a este respeito, fornece algebra elementar. Seria, sem duvida, vicioso considerar este inconveniente como estrictamente proprio á presente questão; por quanto é elle inherente a toda e qualquer avaliação das formulas analyticas, e poderia tambem sobrevir para uma situação finita do ponto de contacto. Todavia, é preciso reconhecer que este embaraço é com mais frequencia occazionado com coordenadas infinitas do que com outras, sobretudo nas equações algebricas propriamente ditas, que aqui consideramos principalmente. O unico conselho geral que, sobre o assumpto, convém agora ao ao leitor, cosiste em reduzir a principio em cada formnla a avaliar, as duas variaveis x e y a uma só, segundo a equação proposta,

e preparar depois a expressão de modo que a variavel independente não entre nella sinão de uma maneira,o que só será possivel nos casos sufficientemente simples. Uma vez satisfeita esta ultima condição, cessará necessariamente a indeterminação.

Seja, para exemplo, a equação commum das tres secções conicas (23),

$$y^2+(1-n^2)\,x^2-2dx+d^2=0.$$

Ter-se-ha aqui

$$a=\frac{d+(n^2-1)x}{y},\quad \text{e}\quad b=y-\frac{x[d+(n^2-1)x]}{y}.$$

Referindo tudo a x, vem

$$a=\frac{d+(n^2-1)x}{\sqrt{(n^2-1)x^2+2dx-d^2}},\qquad b=\frac{dx-d^2}{\sqrt{(n^2-1)x^2+2dx-d^2}}$$

Basta dividir por x os dous termos de cada fracção, para que esta unica variavel não entre ahi mais do que de uma maneira, de modo a dissipar toda indeterminação, porque então

$$a=\frac{\frac{d}{x}+n^2-1}{\sqrt{n^2-1+2\frac{d}{x}-\left(\frac{d}{x}\right)^2}},\qquad b=\frac{d-d\frac{d}{x}}{\sqrt{n^2-1+2\frac{d}{x}-\left(\frac{d}{x}\right)^2}};$$

e como $\frac{d}{x}$ torna-se nullo quando x é infinito, acha-se em fim, sem equivoco

$$a=\pm\sqrt{n^2-1},\qquad b=\pm\frac{d}{\sqrt{n^2-1}}$$

Segundo nossa apreciação geral, estes valores só são imaginarios na ellipse, em que n é inferior a 1. Para a hyperbole, onde $u>1$, indicam duas asymptotas symetricamente dispostas em relação ao eixo da curva, cruzando-se no centro, como o leitor poderá ver ficar com facilidade. Quanto á parabola, em que $n=1$, o valor de a é nullo, o que mostra ser o eixo o limite unico da direcção das tangentes; mas b torna-se infinito, e isto prova que não pode haver asymptotas.

Consideremos agora a eqnação.

$$y^3+x^3=1.$$

Acha-se aqui

$$a=-\frac{x^2}{y^2},\quad b=y+\frac{x}{y^2},$$

donde

$$a=\frac{--x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},\quad \text{e } b=\frac{1}{y^2}.$$

A segunda formula nenhum equivoco apresenta, e dá $b=-0$ para $y=\infty$. Mas, na primeira si dividir-se tudo por x^2, escrevendo,

$$a=-\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}-1\right)^2}};$$

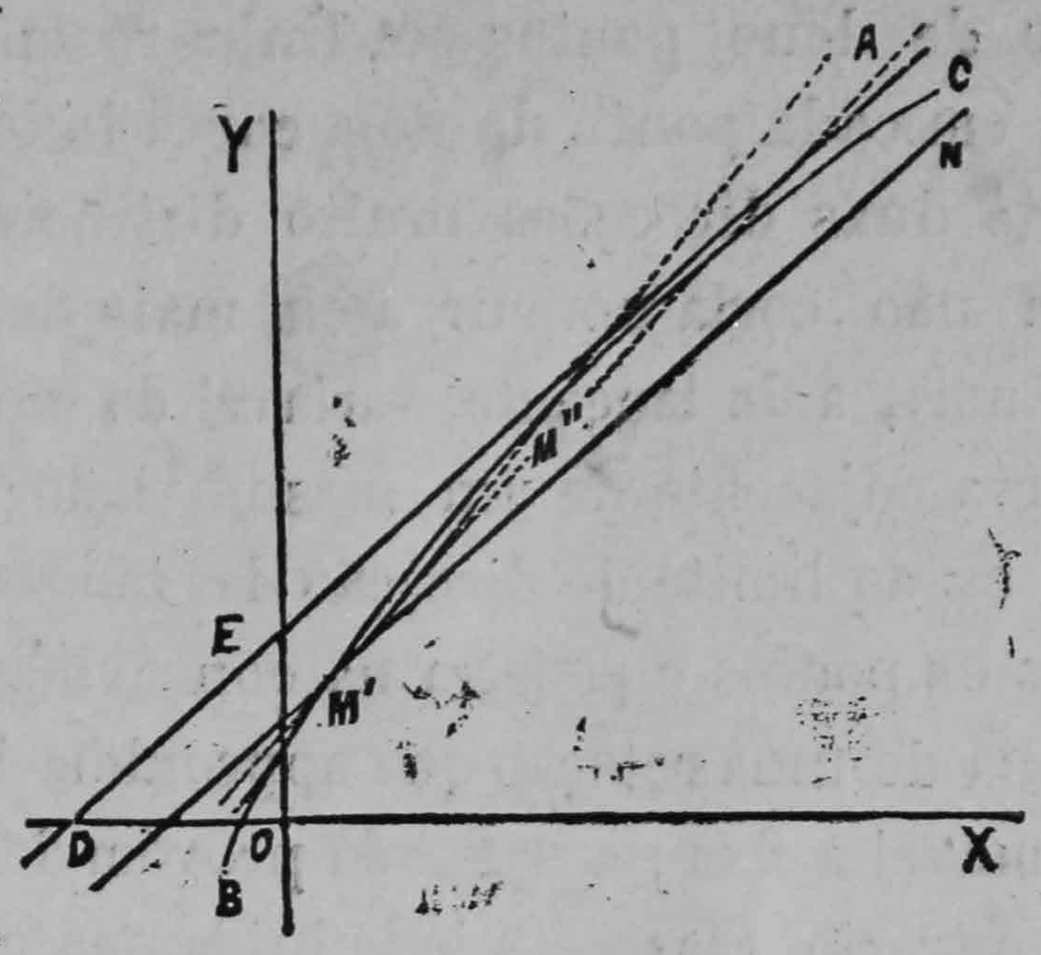
como x, entra aqui apenas uma vez, achar-se-ha immediatamente $a=1$ para $x=\infty$. Assim a equação da asymptota é afinal $y=x$, que indica a bissectriz do segundo angulo dos eixos.

Com quanto possam estes exemplos ser illusorios sobre a facilidade de superar os inconvenientes algebr cos peculiares a este primeiro methodo das assymptotas, seria superfluo multiplical-os mais, pois que as nossas reflexões geraes tem já sufficientemente caracterisado taes embaraços cuja gravidade teremos frequentes occaziões de sentir espec almente na terceira parte deste tratado.

2º Methodo

50.—E' subretudo por ser espontaneamente exempto de tal imperfeição pratica, que se recommenda, para com as curvas algebricas propriamente ditas, o segundo methodo das asymptotas, que já é tempo de explicar. Directamente independente da theoria das tangentes, o principio deste methodo consiste em ver toda asymptota como uma recta da qual as duas intersecções com a curva se têm afastado ao infinito. Para bem apreciar esta concepção, deve-se encarar separadamente a influencia desta hypothese para com uma e depois para com a outra intersecção. Si na curva BC *(fig 36)*, cuja asymptota é AD, considerarmos uma secante qualquer M' M'', girando em torno de M' de maneira que M'' se afaste indefinidamente de M', é claro que no limite M'N, alem do qual o segundo ponto M'' appareceria na outra parte da

curva, a recta ter-se-ha tornado parallella a asymptota. Com effeito, quando o ponto M" estiver ns infinito, pertencerá indifferentemente á curva ou á asymptota. Este primeiro movimento, exactamente inverso do que produz as tangentes, determina, pois, em cada ponto da curva, uma direcção fixa, parallela á asymptota, ou, mais geralmente, ao limite de direcção das tanngentes. Ora si presentemente fizermos tambem variar o ponto M', operando uma rotação analoga em um ponto da curva cada vez mais afasta-



(Fig. 36)

do. e por conseguinte de mais em mais aproximado da asymptota, resultará uma recta que, sempre parallela a esta, tenderá a confundir-se com ella, como si tivesse havido uma translação directa. Assim, a asymptota constituirá naturalmente o limite final das secantes, das quaes duas intersecções têm-se transportado para o infinito. A necessidade de considerar apenas duas intersecções, sem nada anticipar a respeito de outras quaesquer, resulta, como na theoria das tangentes, do numero de pontos necessario para determinar uma linha recta. Um só ponto no infinito, commum com a curva, não caracterisaria sufficientemente a asymptota, por isso que este ponto poderia da mesma sorte convir a todas as suas parallelas. Mas, tres pontos seriam superfluos e, como a respeito da tangente, não poderiam mesmo ser facultativos. A persistencia ou desapparição do terceiro ponto em virtude do affastamento dos dous primeiros, dependerá, segundo os casos, de ser a recta, assim obtida, ou simplesmente secante ou tambem asymptota para com uma outra parte da curva proposta.

Basta aproximar esta concepção á que serve de base ao primeiro methodo, para sentir logo a equivalencia necessaria dos dous principios ; pois que, segundo a coincidencia final que distingue as tangentes, aquella cujo ponto do contacto affasta-se indefinidamente, constitue naturalmente uma recta que tem no infinito dous pontos communs com a curva. Mas, para melhor apreciar esta aproximação fundamental, importa partir desde logo do contraste preliminar acima caracterisado, quando só a

primeira intersecção tem desapparecido, esclarecendo demais o discurso com a menção exclusiva das curvas que não comportam mais de deus pontos em linha recta. Temos assim reconhecido que, em cada ponto de uma curva indefinida, existem necessariamente duas direcções muito distinctas, segundo as quaes uma recta não corta um curva em mais de um ponto. Estas direcções são: uma, a da tangente, variavel de um ponto a outro, deixa toda a curva adjacente de um mesmo lado; a outra, parallela á asymptota ou ao limite de direcção das tangentes, é sempre a mesma em todos os pontos e penetra na eoncavidade da curva. A primeira resulta de uma rotação que approxima indefinidamente a intersecção movel á fixa; a segunda provém de uma rotação inversa que ao contrario, afasta-as indefinidamente uma da outra. Ora, estes dous modos tão differentes de estabelecer a unidade de intersecção tendem a confundir-se, á medida que o centro commum das duas rotações oppostas afasta-se cada vez mais; e os dous limites parciaes necessariamente coincidem quando este ponto tocar o infinito. Tal é a explicação geral da equivalencia fundamental das duas concepções que, sob um certo aspecto, parecem contradictorias.

Com quanto esta nova maneira de encarar as asymptotas coincida geometricamente com a precedente, a forma que lhe é propria conduz a um methodo analytico mui differente do primeiro, e quasi sempre mais commodo, porém só com as curvas algebricas. Basta, com effeito, para determinar os dous coefficientes da asymptota procurada, $y=ax+b$, eliminar y entre esta equação e a da curva dada $f(x,y)=0$, afim de constituir a equação final,

$$f(x, ax+b)=0,$$

de modo que duas de suas raizes tornem-se infinitas, o que fornecerà duas relações pelas qnaes se calcnlarão a e b. Mas, com quanto seja este principio plenamente geral, não se poderia prescrever nenhuma regra flxa quanto á maneira de formular tal condição analytica, quer a respeito das equações transcendentes, quer mesmo para com as curvas algebricas sobrecarregadas de funcções fraccionarias e sobretudo irracionaes. Só para as equações racionaes e inteiras, aliás de um grau qualquer, e da forma

$$Ax^m + Bx^{m1} + Cx^{m2} + \ldots + Kx + Q = 0,$$

é que se pode claramente caracterisar d'ante-mão a existencia de

duas raizes infinitãs, concebendo n'ellas x substituido por $\frac{1}{t}$, com o fim de reduzir este caso ao das raizes nullas. O leitor, ainda que esteja muito pouco exercitado ás especulações algebricas, poderá assim verificar facilmente que uma primeira raiz infinita suppõe nullo o coefficiente do mais alto grau, e que cada uma das outras exigiria a annullação de um dos seguintes, segundo a ordem natural dos expoentes. Desenvolvendo deste modo a equnção $f(x, ax+b)=0$, obter-se-hão, pois, as duas cendições

$$A=0,\ B=0,$$

proprias a determinar a e b.

Si a obtensão dellas arrastar excepcionalmente á annulação de um ou mais dos coefficientes seguintes C, D, etc, achar-se-ha que a asymptota convem tambem a outras tantas novas partes da curva.

Para se fazer inteira apreciação e applicação judiciosa deste methodo, é mister que se tenha primeiro interpretado muito bem estas duas condições algebricas. Segundo a formação d'elle, a primeira, $A=0$, será naturalmenie independente de b, ao passo que a outra deve contel-o com a, o que poderá facilitar muito a avaliação successiva das duas incognitas. Vê-se que esta circumstancia algebrica corresponde a importante observação geometrica acima explicada,—que a desapparição de uma das intersecções, deixando subsistir a outra, determina a direcção fixa da recta, qualquer que possa ser o seu coefficiente linear. De sorte que a independencia necessaria do coefficiente angular a respeito d'elle, acha-se assim confirmada analyticamente, alem da sua evidencia directa. Esta separação espontanea das duas partes da operação está em perfeita conformidade com a natureza da questão, e constitue uma das principaes vantagens do methodo actual. Judiciosamente utilisada, tende a simplificar em extremo os calculos em grande numero de casos. Com ffeito, procedendo primeiro á avaliação propria ao coefficiente angular da asymptota, segundo o espirito da pesquiza, poder-se-ha formar a equação correspondente, $A=0$, substituindo somente $y=ax$; pois que, não devendo ahi entrar b, ella será a mesma que para $b=o$. Ora, esta substituição monomia, que é facil praticar, e segundo a qual se determinará a pela annullacão dos termos do mais alto grau, equivale realmente ao que de util encerra um methodo muito

mal qualificado de novo, em que se procura o limite da relação $\frac{y}{x}$ para y e x infinitos, calculando-se em seguida, quanto ao coefficiente linear, o limite correspondente de $y-ax$. E' facil sentir que esta pretendida innovação não constitue mais que simples mudança de forma no antigo methodo, e que esta recente transformação, mui desfavoravel para com o coefficiente linear, não offerece em verdade, a respeito mesmo do angular, nenhuma utilidade que mereça menção especial.

Importa tanto mais separar habitualmente as duas partes da pesquiza das asymptotas, quanto, por natureza, a determinação do coefficiente angular correspondente constitue uma questão commum a todas as curvas indefinidas, com ou sem asymptotas, que indica, para cada uma dellas, o limite de direcção das tangentes, que é sempre util conhecer. Em fim, é preciso tambem notar que esta primeira noção só por si offerecerà, em muitos casos, uma verdadeira difficuldade; por isso que uma judiciosa discussão previa da equação, ou mesmo da simples definição, imporá muitas vezes ás asymptotas possiveis restricções espontaneas relativamente ao seu coefficiente linear, do qual será desde então superfluo occuparmo-nos distinctamente. E' assim, por exemplo, qua a dupla symetria da hyperbole nos adverte logo que, si esta curva tem asymptotas, devem ellas cruzar-se symetricamente no centro; de sorte que bastará determinar seu coefficiente angular, pela simples substituição de ax em logar de y na equação acima considera, o que reproduzirá mui facilmente o resultado já obtido.

Applicando o conjuncto deste segundo methodo das asymptotas á equação

$$y^3+x^3=1,$$

ter-se-ha a equação final

$$(a^3+1)x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+(b^3-1)=0,$$

d'onde

$$a^3+1=0 \quad \text{e} \quad 3a^2b=0;$$

o que conduz a $a=-1$ e $b=0$, conforme o primeiro methodo. Vê-se aqui que o outro termo em x annulla-se simultanemente, de sorte que a terceira raiz não póde então deixar de ser tambem infinita; o que mais tarde reconheceremos especialmente, con-

forme a natureza desta curva, em que a asymptota se adapta igualmente ás duas partes.

Seja ainda a equação

$$y^3 + x^3 + 3xy = 1.$$

Acham-se aqui as duas condições

$$a^3 + 1 = 0, \qquad 3a^2b + a = 0,$$

que dão $a = -1$, $b = 1$; e, por conseguinte, a asymptota é $y + x = 1$. Reconhecer-se-ha semelhantemente que ella convem tambem a toda a extensão da curva.

51.— Si bem que os dous methodos geraes que temos estabelecido successivamente sejam os unicos verdadeiramente usuaes que deviamos por habito applicar ás curvas algebricas, não será inutil á instrucção logica do leitor considerar em resumo um outro methodo que, á primeira vista, parece distincto dos dous precedentes, mas que, melhor apreciado, não constitue no fundo sinão uma transformação, aliás sem maior vantagem, do nosso segundo methodo. Poderá este exemplo caracteristico contribuir para fazer evitar essa deploravel fecundidade que, em essencia relativa ao estylo analytico, sem attingir na realdade ao pensamento geometrico, atulha muitas vezes as obras mathematicas com uma vã repetição da mesma noção sob fórmas diversas, cuja mór parte deve ser desprezada.

O principio deste terceiro methodo repousaria sobre a influencia algebrica da coincidencia da asymptota procurada, com um dos eixos das coordenadas. Si o eixo dos x é asymptota, a equação, devendo fornecer dous valores infinitos de x para $y = 0$, deve carecer dos dous termos em x do mais forte expoente. Quando não fôr expontaneamente satisfeita esta condição, indicará que o eixo actual não é uma asymptota da curva proposta; mas concebe-se que tal effeito analytico resultaria da escolha da asymptota para eixo. Portanto, operando na equação dada, $f(x, y) = 0$, uma transposição de eixos totalmente indeterminada, esta substituição,

$$f(x' \cos X' + y' \cos Y' + \alpha,\ x' \operatorname{sen} X' + y' \operatorname{sen} Y' + \beta) = 0,$$

permittirá discernir os valores das constantes introduzidas, α, β, X', Y', proprios a prehencher esta condição, pela annullação do

coefficientes totaes das duas mais altas potencias de x; e a asymptota que se busca ficará assim determinada.

Considerando o conjuncto desta operação analytica, sente-se a principio que ella contem inuteis complicações, pois que apenas fornece duas equações para o calculo das incognitas que parecem ser em numero de quatro. E' isto devido a que o caracter adoptado só exige que a asymptota seja tomada para eixo dos x, sem nada prescrever acerca do outro eixo, o que permitte e mesmo requer que este não se mude, de sorte que pode-se e deve-se suppôr $Y, = 90°$ e $\alpha = 0$. A disponibilidade destas duas constantes em nada poderia facilitar o preenchimento effectivo das condições convenientes, e sobrecarregaria inutilmente os calculos. A equação precedente reduz-se, pois, no fundo, a

$$f(x' \cos X',\ x' \operatorname{sen} X' + y' + \beta) = 0.$$

Ora, como a final deve-se ahi considerar apenas os termos affectos só de x, poder-se-ha ainda facilitar a formação delles pondo d'ante-mão $y' = 0$, o que dará em ultimo lugar a equação

$$f(x' \cos X',\ x' \operatorname{sen} X' + \beta) = 0,$$

em que se trata de annullar os coefficientes dos dous termos preponderantes, a fim de determinar as incognitas X' e β que representam o coefficiente angular e o linear da asymptota procurada. Assim desembaraçada de toda superfluidade algebrica, equivale evidentemente esta operação a formar as duas equações proprias ao segundo methodo, com a unica innovação, de modo algum favoravel, de ahi entrar agora o angulo X' por meio do seno e do coseno, em vez de ser só pela tangente.

Esta apreciação final, a principio apresentada muito especiosamente como distincta por um vão apparelho analytico, póde surgir a alumnos e professores uteis aproximações similhantes para com muitas outras questões que aqui não convem mencionar.

52. — Como nenhum dos nossos methodos é obstado pela indeterminação dos coefficientes nas equações propostas, uma vez que sejam especificados os expoentes, cada um delles applicado em sentido inverso conduz facilmente a formular as condições analyticas de asymptotismo entre uma curva dada apenas de especie, mas desconhecida de grandeza ou de posição, e uma recta inteiramente dada. Bastará procurar, segundo a equação proposta

$$f(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots) = 0,$$

o coefficiente angular e o linear da asymptota correspondente, seguindo á vontade um dos dous methodos, e igualar a expressão destes coefficientes aos valores respectivos, indicados pela recta dada. Formar-se-hão duas relações tendentes a determinar as constantes incognitas da curva, α, β, γ, etc., conjunctamente com outras condições já formuladas, como passagens ou contactos. Aqui verifica-se que toda asymptota equivale a dous pontos para a determinação de uma curva qualquer, segundo o espirito da nossa primeira theoria, que recebe agora uma nova extensão geral. A operação é pois a mesma que quando se tratava de achar a asymptota, tendo-se apenas trocado a destinação ulterior das duas condições obtidas, em que já não é indispensavel, si tem-se empregado o segundo methodo, separar os coefficientes da asymptota.

Esta questão conduz naturalmente á pesquiza das asymptotas curvilineas de especie dada, no caso, unico verdadeiramente usual, em que as curvas propostas sejam ambas susceptiveis de asymptotas rectilineas, constituindo então a coincidencia destas asymptotas. A principio é evidente que, si a curva dada tem uma asymptota, a curva procurada deverá tambem admittil-a sem o que o seu mutuo asymptotismo seria contraditorio. Isto posto, tal asymptotismo poderá sempre ser concebido como consistindo em que as duas curvas comportem uma asymptota commum e por conseguinte esta questão entrará na precedente, depois de ter-se a principio determinado a asymptota da curva dada. Si $f(x, y) = 0$ designa a sua equação, $f(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$, a da curva procurada, adoptando o segundo methodo, substituir-se-ha previamente $y = ax + b$ na primeira, a fim de calcular, do modo ordinario, os valores de a e de b proprios á asymptota. Quando forem obtidos, far-se-ha a substituição determinada $y = ax + b$ na segunda equação, e a annullação das duas mais altas potencias formulará ahi as condições necessarias do asymptotismo proposto, que, assim concebido, jamais contribuirá sinão como dous pontos para a determinação da curva procurada. A introducção da asymptota commum, ulteriormente eliminada, terá finalmente servido para facilitar muito a formação destas duas relações.

53.— Só nos falta agora considerar as condições de asymptotismo entre curvas que não comportam asymptota rectilinea, e que contudo podem muita vez ser asymptotas uma da outra, como é

Asymptotas não rectilineas.

acil fazer sentir por alguns exemplos. E' assim que duas parabolas iguaes, collocadas sobre o mesmo eixo, são necessariamente asymptotas uma da outra, segundo sua definição. A comparação das suas equações o confirma alliás com a maxima clareza, mostrando que então existe uma differença constante entre os quadrados de suas ordenadas, e, portanto, uma differença indefinidamente decrescente entre estas mesmas ordenadas. Achar-se-hia semelhantemente que as duas curvas

$$y^p = mx^q \text{ , e } y^p = mx^q + n$$

são necessariamente asymptotas uma da outra; o que comprehende uma infinidade de exemplos distinctos, bem que analogos, pela indeterminação dos expoentes p e q.

O principio fundamental do nosso segundo methodo adapta-se tambem á pesquiza directa das asymptotas curvilineas, desde que se defina convenientemente o asymptotismo. Esta affeição geometrica deve, com effeito, tanto quanto a do contacto de que, no fundo, offerece uma pura modificação geral, ser considerada como susceptivel de grau, segundo as explicações do n. 44, em que basta substituir a coincidencia das intersecções por seu afastamento ao infinito. Sempre determinavel por meio de dous pontos, uma recta não comporta, para com uma curva qualquer, sinão o menor asymptotismo, correspondente a duas intersecções infinitas. Mas uma parabola, determinada por quatro pontos no minimo, seria susceptivel, a respeito das mesmas curvas, de um asymptotismo mais pronunciado, no qual desappareceriam quatro intersecções. Assim, o modo ordinario, segundo o qual é posto o problema das asymptotas, não poderia ser sufficientemente preciso sinão só para com a linha recta, e constituirá, para qualquer outro genero de asymptotas, uma investigação necessariamente indeterminada. Limitando-se a isto, bastará eliminar y entre as equações das duas curvas consideradas,

$$f(x, y) = 0 \text{ , } \quad \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots) = 0 \text{ ,}$$

e annullar os dous primeiros coefficientes da equação final, o que fornecerá duas relações entre as contantes incognitas α, β, γ, etc. da segunda curva. Tal asymptotismo não contribuirá ainda, sinão como dous pontos ordinarios, para a determinação ulterior desta curva.

Apezar de ser este processo em geral applicavel ás curvas

algebricas, concebe-se que o uso delle tornar-se-ha muitas vezes impraticavel, em virtude das difficuldades analyticas suscitadas pela eliminação fundamental, quando as duas equações são tão complicadas que não se possa effe tual-a por substituição, o que obriga a recorrer aos methodos, especulativamente sufficientes, mas de ordinario impraticaveis, que, a este respeito, fornece a algebra superior. Tal é o principal motivo que deve fazer sentir a importancia da solução acima explicada, para com as curvas susceptiveis de asymptotas rectilineas em que este util intermediario permitte illudir felizmente estes graves embaraços algebricos.

Para que a pesquiza das asymptotas curvilineas se tornasse, em cada caso, tão precisa quanto a das asymptotas rectilineas, fôra mister levar sempre o asymptotismo até o grau marcado pelo numero de pontos determinante, como expliquei (44) a respeito do contacto. Então, a parabola asymptota, por exemplo, seria aquella de que quatro intersecções com a curva dada se afastassem simultaneamente ao infinito, o que forneceria quatro condições necessarias, segundo a annullação dos quatro primeiros coefficientes da equação final correspondente, onde quatro raizes deveriam ao mesmo tempo tornar-se infinitas. Approximando convenientemente estas duas grandes questões geometricas, reconhece-se que a mesma equação permitte formular, ora cada grau de contacto, ora cada grau de asymptotismo, exprimindo-se que um certo numero de raizes tornam-se ora iguaes ora infinitas, sendo demais a segunda relação de muito mais facil constituição do que a primeira.

54.— A fim de não omittir cousa alguma de usual em relação a esta terceira theoria geral, resta-nos considerar summariamente, a titulo de methodo subsidiario proprio a certos casos, um artificio analytico assaz extenso. Com quanto tenha sido viciosamente exagerada a sua importancia, um judicioso emprego delle comportará algumas vezes verdadeira utilidade, para achar a commodo diversas asymptotas, ora rectilineas, ora curvilineas. Elle basêa-se na decomposição da funcção, algebrica ou transcendente, que exprime a ordenada segundo a abscissa, em duas partes : uma que anniquila-se quando a abscissa torna-se infinita, outra que desde ntão representa a ordenada de uma linha necessariamente asymptota da proposta. Si, com effeito, tem-se

$$y = \varphi(x) + f(x)$$

e suppõe-se $\varphi(\infty)=0$, é claro que a differença entre esta ordenada e a da linha $z=f(x)$ não póde annullar-se para x infinito, sem ter decrescido indefinidamente para valores crescentes de x. Concebe-se que o mesmo se daria com mais forte razão, si em lugar de y e z serem do primeiro grau, estivessem elevados a quasquer outras potencias iguaes ; pois que então existiria o asymptotismo, segundo uma observação anterior, quando mesmo a differença dos segundos membros das equações, em vez de diminuir, se conservasse constante. Isto poderá augmentar um pouco o alcance deste artificio, não obrigando a desembaraçar y totalmente. Demais, é mister reconhecer que, si a funcção $\varphi(x)$ é composta de muitos termos, poder-se-ha ajuntar á funcção $f(x)$ a parte que se quizer, sem de modo algum alterar a observação fundamental, e de maneira a obter novas asymptotas. E' porém, evidentemente indispensavel não deixar na funcção $\varphi(x)$ termo algum, além dos que se annullam para x infinito.

A respeito das equações algebricas, que sobretudo devemos aqui ter em vista, esta funcção $\varphi(x)$ se comporá de potencias negativas, quer inteiras, quer mesmo fraccionarias, as quaes não poderão existir, quando a ordenada fôr uma funcção racional e inteira da abscissa. Em qualquer outro caso, a introducção dellas será espontanea, ou tornar-se-ha facultativa, desenvolvendo convenientemente os quocientes ou os radicaes, segundo as regras de divisão e de extracção. Embora devam de ordinario estes desenvolvimentos fazer nascer uma serie infinita de taes termos, é evidente que esta circumstancia não poderia oppôr nenhum obstaculo á determinação das asymptotas correspondentes ; e, desde que não se omitta termo algum dos de expoentes positivos, poder-se-ha ahi comprehender dos outros tantos e tão poucos, quantos se queiram. Por exemplo, com a equação acima considerada, $y^3+x^3=1$, ter-se-hia $y=-\sqrt[3]{x^3-1}$, e a extracção da raiz só daria o termo x affecto de expoente positivo; o que reproduziria logo a asymptota $y=-x$, já obtida.

Além de sua restricção evidente, este expediente analytico é sobretudo imperfeito em que a natureza das asymptotas não poderia ser facultativa, de sorte que o mais das vezes elle indicaria curvas ociosissimas, sem determinar as asymptotas rectilineas, unicas que podem habitualmente offerecer um verdadeiro interesse. Não obstante, importa conhecel-o, para fazer bom emprego

delle nos casos que o permittirem, dos quaes para diante citaremos alguns exemplos notaveis, mesmo além das equações do segundo grau, consideradas a este respeito com excessiva exclusão.

CAPITULO IV

THEORIA DOS DIAMETROS

55.—Por muito tempo limitado ao circulo, para designar toda recta que passa pelo centro d'elle, este nome indica actualmente, para com uma curva qualquer, a linha, ás vezes recta, mas de ordinario curva, que une os meios de uma serie de cordas parallelas, definição que, no caso de circulo, reproduz espontaneamente a noção primitiva. Acerca das curvas susceptiveis de terem mais de dous pontos em linha recta, cada corda sempre unirá apenas dous pontos, e a unica differença é que apresentará tantos meios quantas forem as combinações binarias entre todas as suas intersecções, o que poderá ás vezes fazer prever um limite inferior do grau da equação do diametro, então habitualmente superior ao da equação dada.

Com quanto os diversos diametros relativos aos differentes systhemas de cordas de uma mesma curva não sejam sempre de uma mesma especie geometrica, a ponto de uns poderem ser simples rectas, ao passo que outros são curvas mais complicadas do que a primeira, comportam contudo uma equação commum, em que fica indeterminado o coefficiente angular destas cordas, de sorte que seus valores especiaes produzam todos os diametros particulares, por distinctos que possam ser, segundo a influencta analytica mais ou menos intima desta constante caracteristica. E' uma tal equação geral que procura-se deduzir da equação da curva proposta.

Bem que convenha tratar com toda a generalidade possivel esta nova theoria geometr ca, é mister entretanto reconhecer que por natureza não poder a ella, como ac precedentes e como as seguintes, offerecer igual interesse para com todas as curvas. Com

effeito, o estudo dos diametros não contribue realmente para fazer conhecer melhor cada curva, sinão quando são muito mais simples do que a linha que os gera, e sobretudo quando são rectos. Ora, pelo contrario, os diametros constituem quasi sempre, como abaixo se verá, curvas mais complicadas do que aquellas de que provêm; e é sómente para as curvas do segundo grau que indistinctamente tornam-se rectilineos (*). Esta theoria não tem, pois, em geral tanta importancia geometrica como as outras seis tratadas nesta segunda parte.

Podemos instituil-a por dous methodos analyticos bem distinctos, com quanto igualmente geraes, ao menos para com as curvas algebricas,— um muito natural e directo, mas de applicação penosissima, o outro artificial e indirecto, porém em fim mais usual.

56.—O primeiro, facil de conceber, consiste em formular espontaneamente cada uma das condições da definição, introduzindo como variaveis auxiliares, salvo ulterior eliminação, as coordenadas x', y', e x'', y'', das duas extremidades de qualquer dascurvás consideradas. Chamando t e u as coordenadas ndeterminadas de um ponto do diametro, e m o coefficiente angular das cordas correspondentes, ter-se-hão a principio as tres equações fixas

$$t=\frac{x''+x'}{2},\quad u=\frac{y''+y'}{2},\quad m=\frac{y''-y'}{x''-x'},$$

ás quaes se juntarão naturalmente, em cada caso, as duas equações especiaes

$$f(x',y')=0,\quad f(x'',y'')=0,$$

que exprimem que os dous pontos introduzidos pertencem á curva dada $f(x,y)=0$. Bastará, pois, eliminar entre os dous grupos de equações as quatro variaveis auxiliares, x', y', x'', y'', para obter

---

(*) A Comte, na sua *Synthese subjectiva*, reconheceu ter-se enganado neste ponto, e o corrige nos seguintes termos : « O emprego « desta theoria permittiria a rectificação directa e completa, que faz « entrever espontaneamente, do erro especial que commetti, no « tratado acima mencionado (*Geometria Analytica*), representande « as curvas do segundo grau como as unicas cujos diametros são rec- « tilineos. Foi-me logo possivel reconhecer e proclamar este despreze « segundo meu ensino publico, descobrindo entre as curvas susceptiveis de centro, uma infinidade de casos decisivos, com auxilio do « uma sufficiente generalisação do theorema das cordas suplementa- « res. » (*Synth. subject.* 1º vol., cap. IV, pag. 392.—1856.)

logo a equação final $\varphi\ (t,\ u,\ m)=0$, propria ao conjuncto dos diametros considerados. Ainda que o primeiro grupo só se componha de equações do primeiro grau, a dupla eliminação a que deverá presidir o segundo tornar-se-ha ás vezes quasi impraticavel, quando a curva dada fôr de grau um pouco elevado, mesmo com pequeno numero de termos. Sabe-se de mais que a extrema imperfeição da analyse mathematica quasi nunca permittiria semelhante operação tratando-se das curvas transcendentes, si tal pesquiza podesse offerecer para com ellas um verdadeiro interesse.

Um só exemplo caracterisará sufficientemente este methodo, salvo seus embaraços analyticos que em geral é facil conceber, e que o leitor deverá especialmente sentir fazendo alguns exercicios espontaneos. Seja a curva $y=x^3$. As duas equações variaveis serão $y'=x'^3$, $y''=x''^3$; e, tendo-as em vista, as equações fixas tornar-se-hão

$$2t=x''+x',\quad 2u=x''^3+x'^3,\quad m=x''^2+x''x'+x'^2,$$

entre as quaes resta apenas eliminar x' e x''. Ora, esta eliminação com facilidade se effectuará por substituição, combinando-se as duas equações extremas, o que dá

$$x''=t+\sqrt{m-3t^2},\quad x''=t-\sqrt{m-3t^2};$$

donde a final resulta, para o conjuncto dos diametros, a equação

$$y=3ax-8x^3,$$

retomando a notação habitual das coordenadas, desde que não possa mais haver equivoco.

Si apenas quizessemos executar um calculo semelhante a respeito dás curvas $y=x^4$ ou $y^2=^3$, muito pouco differentes da precedente, experimentariamos difficuldades algebricas mui consideraveis.

57.—Todo o artificio do segundo methodo repousa sobre esta observação evidente — que as duas extremidades de cada corda adquirem necessariamente coordenadas iguaes e de signaes contrarios, quando se colloca a origem dos eixos no ponto correspondente ao diametro. Assim, os pontos do diametro podem ser reciprocamente caracterisados por esta apt dão analytica, que a outros não poderia convir. Si, pois, se opera na equação dada,

$f(x, y)=0$, uma indeterminada deslocação de origem, pela muita usada substituição de $t+x$ e $u+y$ em lugar de x e y, será preciso buscar a relação entre t e u, propria tornar a nova equação $f(t+x, u+y)=0$ sueceptivel de fornecər para x, e portanto para y, dous valores iguaes e de signaes contrarios, quando se suppozer que $y=mx$ seja a equação da corda correspondente. Em consequencia, consistirá finalmente a questão, depois de ter a principio mudado x em $t+x$ e y em $u+mx$, em descobrir a condição de uma tal opposição algebrica entre as duas raizes da equação

$$f(t+x, u+mx)=0,$$

onde figurarão t e u, a titulo de constantes arbitrarias, entre os diversos coefficientes. Ora, para resolver este problema de algebra, bastará constituir a divisibilidade do primeiro membro desta equação por um binomio do segundo grau, $x^2-\alpha^2$. A eliminação da indeterminada auxiliar α, que aqui designa a abscissa especial do par de pontos eonsiderados, entre as duas equações que serão fornecidas pela annullação acostumada do resto do primeiro grau, conduzirá á relação procurada $\varphi(t, u, m)=0$ que, encarada geometricamente, constitue a equação geral dos diametros da curva proposta.

Apezar de muitas vezes penivel, será este methodo muito menos laborioso do que o precedente, como só exigindo uma eliminação, em vez de duas, entre equações de grau superior, ainda que nelle a composição destas equações deva ser mais complicada do que d'antes.

Seja, por exemplo, a curva $y=x^4$. Substituindo $t+x$ e $u+mx$ em lugar de x e de y, tem-se finalmente a equação

$$x^4+4tx^3+6t^2x^2+(4t^3-m)x+(t^4-u)=0,$$

em que se trata de exprimir a divisibilidade por $x^2-\alpha^2$, o que dá executando a divisão, as duas equações

$$4t^3-m+4t\alpha^2=0, \quad t^4-u+\alpha^2(6t^2+\alpha^2)=0.$$

A eliminação de α^2 conduz facilmente á equação geral dos diametros

$$16x^2y=m^2+16m^2x-64x^6,$$

muito mais complicada, como se vê, do que a da curva primitiva.

Para com as curvas do segundo grau, comporta espontaneamente este segundo methodo uma extrema simplificação que

desde já devemos notar. E' que, com effeito, ficamos então dispensados da divisão e sobretudo da eliminação consecut va que lhe constitue o principal embaraço algebrico. Sendo apenas do segundo grau a equação em x, a condição analytica funnamental deverá consistir directamente na ausencia dos termos do primeiro grau. Todo o calculo se reduzirá, pois, neste caso, á simples substituição previa de $t+x$ e $u+mx$ em lugar do x e do y; e, para logo, a equação geral dos diametros resultará da annullação do coefficiente total da primeira potencia de x.

58.—Para procurar convenientemente ao estudo effectivo dos diametros toda a utilidade de que é susceptivel na geometria comparada, muito importaria poder sufficientemente constituir a theoria inversa, que nos permittiria não proseguir uma tal apreciação geometrica, s não para com as curvas cujos diametros offerecessem assaz s mplicidade, apreciacção que agora não poderia ser facultativa. Esta volta da equação commum dos diametros á da curva primitiva constituiria, pois, em geral, uma questão ma·s interessante do que a investigação directa. Mas, no estado actual da sciencia, os nossos recursos a esto respeito, como vou explicar, são extremamente limitados, em consequencia de uma grave lacuna analytica, demais muito fastidiosa em muitas outras occasiões.

A natureza eminentemente simples e directa do primeiro methodo torna-o o unico proprio a tal inversão, que parece dever aqui limitar-se a substituir as formulas fixas na equação dada $\varphi(t, u, m)=0$ para o conjuncto dos diametros. Mas, apezar de terem-se assim eliminado as coordenadas do diametro, e introduzido as da curva, não se poderia encarar este resultado

$$\varphi\left(\frac{x''+x'}{2}, \quad \frac{y''+y'}{2}, \quad \frac{y''-y'}{x''-x'}\right)=0,$$

como constituindo na realidade a equação da curva primit·va. porisso que n'elle se acham ao mesmo tempo dous pontos indeterminados desta curva, em vez de um só. Não obstante, deduzir-se-hia delle facilmente a equação procurada, si se podessem separar estes pontos, de sorte que cada membro se referisse a um só par de coordenadas. Com effeito, devendo sempre os dous pares ahi entrar espontaneamente da mesma maneira, esta equação tomaria a forma

$$f(x', y')=f(x'', y''),$$

a qual indicaria que uma certa funcção das cordenadas conserva um valor invariavel, passando de um ponto qualquer da curva pedida a um outro ponto tambem qualquer. Portanto, a equação desta curva seria a final

$$f(x, y) = c,$$

devendo a constante c ahi ficar naturalmente arbitraria, pois que cada systema de diametros pode corresponder a uma infinidade de cnrvas distinctas, com quanto analogas.

Toda a difficuldade real da theoria inversa dos diametros reduz-se, pois, a final a este problema puramente analytico: entrando identicamente em uma equação dada dous grupos de variaveis, transformar esta equação de modo que cada membro contenha só um grupo. Mas a analyse actual nenhum principio apresenta realmente que seja proprio a instituir este calculo de separação. Não sabe-se até hoje separar os grupos,sinão quando não coexistem nos mesmos termos; e, então, basta fazer uma transposição conveniente de termos, segundo a regra analytica a mais elementar. E' facil sentir quanto é raro que tem exiguos recursos possam ser satisfactorios.

Para citar um exemplo caracteristico, proponhamo-nos achar a curva cujos diametros sejam todos rectilineos, perpendiculares as cordas correspondentes e convergindo em um mesmo ponto, em que collocaremos a origem. A equação destes diametros será

$$t + mu = 0,$$

que fornece, entre dous pontos quaesquer da curva procurada, a relação

$$x'' + x' + \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(y'' + y') = 0.$$

Ora, como se destroem espontaneamente os termos em que os pontos co-existem, uma facil transposição a reduz logo á forma

$$x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2,$$

o que dá finalmente para a curva pedida a equação

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

na qual se reconhece, conforme a natureza do caso, um circulo de raio arbitrario.

59.—A grande complicação habitual dos calculos relativos á formação da equação geral dos diametros, embora siga-se a melhor

mar ha, e a evidente inutilidade de tal investigação para com a mór parte das curvas, devem fazer dar grande apreço a uma commoda determinação especial dos diametros rectilineos, os unicos ordinariamente susceptiveis de verdadeiro interesse, sem obrigar a deduzil-os desta equação commum, em que aliás estariam necessariamente comprehendidos. Ora, é facil instituir este importante methodo subsidiario, segundo as formulas relativas á transposição dos eixos, fundando-se sobre a influencia analytica dos diametros rectilineos, quando se toma cada um delles para eixo das abscissas com ordenadas parallelas ás cordas correspondentes. Por si a definição dos diametros leva facilmente a reconhecer, como em muitas occasiões indiquei na primeira parte deste tratado, que então a equação deve apenas encerrar as potencias pares da ordenada, afim de que os valores d'esta possam ser dous a dous iguaes e de signaes contrarios para cada valor da abs issa, segundo um caracter essencialmente analogo ao que forma a base do segundo methodo geral. Podendo, pois, bastar tal aptidão analytica para caracterisar os diametros rectilineos, obtel-os-hemos por uma indeterminada transposição de eixos, pelas formulas

$$x=x'\cos \mathrm{X}'+y'\cos \mathrm{Y}'+a,\quad y=x'\operatorname{sen} \mathrm{X}'+y'\operatorname{sen} \mathrm{Y}'+b,$$

si os antigos eixos são rectangulares, procurando dispôr das constantes angulares ou lineares assim introduzidas, para anniquilar na equação proposta todos os termos distinctos relativos ás potencias impares de y', resultantes desta substituição. Quando os valores reaes e finitos d'estas diversas constantes tiverem podido prehencher todas estas condições, a curva proposta admittirá diametros rectilineos, para cada um dos quaes se reconhecerá assim um ponto, sua direcção e a das cordas correspondentes. No caso contrario, verificar-se-ha semelhantemente a ausencia de taes diametros.

Como este caracter analytico de modo algum depende da posição da origem, com tanto que esta fique sobre o diametro, poder-se-hia, para abreviar os calculos, supprimir uma das constantes lineares a ou b, sem na realidade diminuir a faculdade de satisfazer ás condições propostas, pois que isto reduz-se a collocar a origem na interseção do diametro procurado com um dos eixos actuaes. Assim, as constantes arbitrarias introduzidas são sempre só em numero de tres, e não permittirão por conseguinte

annular á vontade mais do que tres das potencias impares da nova ordenada. Si, pois, a equação dada contêm-nas em maior numero, serão o problema de ordinario impossivel. E' o que tem logar desde o terceiro grau, em que as condições seriam já em numero de quatro por causa dos termos em y', $x'y'$, $y'^2x'^2$ e $y^{3'}$, disproporção que em seguida se pronuncia cada vez mais, á me-i dida que o grau é mais elevado.

Considerando, pois, a este respeito o conjuncto das curvas algebricas, vê-se que a existencia dos diametros rectilineos, sem jamais ser impossivel em nenhum outro grau, torna-se de mais em mais excepcional além do segundo. Mas, sendo só duas as condições para este grau, o problema é, ao contrario, indeterminado, e ha uma infinidade de diametros rectilineos, ou antes todos o são; pois que, ficando arbitraria a direcção das cordas, poder-se-ha ainda satisfazer ás condições convenientes só pela disponibilidade das duas eonstantes, angular e linear, proprias ao diametro correspondente.

Operando-se uma ligeira transformação em tal methodo de determinação especial dos diametros rectilineos, conduz elle mmediatamente a determinar tambem os *eixos* geometricos propriamente ditos, isto é, as rectas em torno das quaes uma curva é symetrica, porque ellas constituem evidentemente simples diametros rectilineos que não se distinguem dos outros sinão por serem perpendiculares ás cordas correspondentes. Ter-se-ha attendido sufficientemente a esta circumstancia caracteristica, empregando na substituição fundamental as formulas

$$x = x' \cos X' + y' \text{sen } X' + a, \quad y = x' \text{ sen } X' + y' \cos X' + b,$$

em que fica expressa a rectangularidade dos novos eixos. As condições ordinarias só poderão, pois, ser aqui prehenchidas com auxilio das duas constantes arbitrarias relativas ao eixo será procurado; de sorte que, em geral, a existencia de taes eixos ainda mais excepcional que a dos outros diametros rectilineos, e a situação d'elles tornar-se-ha mesmo determinada para o segundo grau, excepto o caso do circulo em que é facilmente explicavel esta anomalia analytica.

Quando tem sido achado o eixo de uma curva, e está collocado de maneira a encontral-a, esta intersecção constitue uma especie notavel de pontos singulares, cuja verdadeira natureza depende

em seguida da direcção correspondente da tangente. Segundo a supposta symetria, esta direcção não póde evidentemente ser outra sinão a do eixo ou sua perpendicular, salvo si houver duas tangentes symetricamente dispostas em torno do eixo. O ponto procurado será, pois, um ponto de reversão no primeiro caso, um nó no ultimo, e o que se chama um *vertice* no outro caso.

CAPITULO V

THEORIA DOS CENTROS

60.—Para estenter convenientemente esta denominação geometrica, durante muito tempo limitada ao circulo, basta restringir só á comparação binaria dos pontos directamente oppostos a noção de equidistancia, outr'ora absoluta, que constitue o seu caracter essencial; de sorte que o centro de uma curva é, em geral, o meio de todas as cordas que por ahi passam, quaesquer que sejam aliás seus comprimentos relativos. Um tal ponto é necessariamente unico nas curvas algebricas propriamente ditas, que sobretudo devemos aqui ter em vista, pois que ellas só podem offerecer um numero limitado de pontos em linha recta. Mas, ao contrario, ha curvas transcendentes que, podendo ser cortadas por uma recta em uma infinidade de pontos, apresentarão algumas vezes uma infinidade de centros, como teremos em seguida occasião de verificar, por exemplo, com as curvas $y = \text{sen } x$, $y = \text{tang } x$.

Seria superfluo insistir aqui sobre a importancia evidente de tal pesquiza, attento que a determinação do centro de uma curva, ou mesmo a certeza de que ella o não comporta, deve certamente contribuir muito para melhor indicar sua figura geral.

Em geral, esta questão admitte dous methodos mui distinctos: um naturalissimo, mas muito complicado, prende-a ao estudo dos diametros; o outro, mais indirecto, porém muito mais simples e, em verdade, o unico usual, lhe é especialmente proprio.

61.—Consiste o principio do primeiro em considerar o centro de uma curva como o ponto de concurso necessario de todos e quaesquer diametros, porque, aproximando as duas definições, concebe-se logo que, si uma curva tem um centro, cada um dos diametros deverão passar n'elle ; e, reciprocamente, si todos os diametros de uma curva têm um ponto commum, este ponto será porisso mesmo o centro d'ella. Sob este aspecto, a theoria analytica dos centros consistiria em julgar, segundo a equação geral dos diametros da curva proposta, formada de accordo com as regras do do capitulo precedente, si estes diversos diametros convergem indistinctament em um ponto unico. Quando esta convergencia tem logar na origem das coordenadas, basta a inspecção da equação dos diametros para indical-o immediatamente, pela ausencia constante do termo independente das duas variaveis. E' assim, por exemplo, que para a curva $y=x^3$, a equação geral dos diametros obtida no capitulo precedente, $y=3mx-8x^3$, mostra que o centro está na origem, pois que, qualquer que seja m, o dametro sempre passará por elle. Mas, quando este concurso opera-se em um ponto qualquer do plano, um calculo especial, ás vezes penivel, torna-se indispensavel á sua manifestação. E' preciso então attribuir ao parametro angular m, que na equação geral distingue os diversos diametros, dous valores differentes e indeterminados m' e m'', z procurar em seguida as coordenadas do ponto commum a estes dous diametros quaesquer, que podem representar todas as cobinações binarias dos diametros prapostos. Si os valores destas coordenadas communs, simplificadas o quanto possivel, tornam-se afinal independentes de m' e m'', a curva terá um centro, cuja posição será determinada por estes valores, pois que a convergencia universal dos diametros ahi será assim verificada. Quando, ao contrario, se tiver reconhecido que estes valores não podem tornar-se independentes de m' e m'', como o mais das vezes acontecerá, tendo então cada par de diametros sua intersecção propria, ha certeza de que a curva não tem centro.

Seja para exemplo a curva $y^2-xy+x=0$. Applicando-se-lhe o segundo methodo dos diametros, achar-se-ha com facilidade que sua equação geral é $y=\frac{mx-1}{2m-1}$ Ora, fazendo-se successivamente $m=m'$, $m=m''$, acha-se a principio que a abscissa commum é

$\frac{2m''-2m'}{m''-m'}$, fracção independente de m'' e de m' e sempre igual a 2; mas é mister além disso certificar-se de semelhante caracter para com a ordenada correspondente que, com effeito, acha-se expressa desde então por $\frac{2m'-1}{2m'-1}$. A curva tem, pois, um centro cuja abscissa é 2 e a ordenada 1.

Consideremos ainda a curva $y^2-2xy+x^2-x=0$. A equação geral do diametros é aqui $y=x+\frac{1}{2m-2}$. A inspecção por si mostra que todos os diametros são rectas parallelas, donde segue-se que a curva carece de centro.

Este methodo tornar-se-ha muitas vezes quasi impraticavel acima do segundo grau, pois que, alem da formação frequentemente penosa da equação geral dos diametros que, demais, não tem em si mesma nenhuma outra util dest nação geometr ca, exige elle uma eliminação de ordinario laboriosissima, entre equações que sào sempre mais complicadas do que as da curva dada. Não tenho, pois, mencionado este primeiro meio, sinão como consequencia natural da theoria estabelecida no capitulo antecedente. E' somente de occordo com o segundo methodo que, por habito, se deverá proceder á determinação dos centros.

62.—Só da definição do centro resulta para logo que, si tomarmos este ponto para origem das coordenadas, qualquer que seja aliás a direcção ou a inclinação dos eixos, todos os pontos da curva terão dous a dous coordenadas iguaes e de signaes contrarios; de sorte que a equação não deverá mudar quando nella se trocarem simultaneamente os signaes das duas variaveis. E' semelhantemente evidente, em sentido inverso, que a verificação de tal caracter analytico permitte assegurar que a or gem correspondente é o centro da curva. Tal é o principio geral sobre que ropousa o methodo mais proprio á pesquiza dos centros. E' assim que, pela simples inspecção das equações $y=x^3$, $y=\text{sen } x$, $y=\text{tang } x$, se reconhece que estas curvas têm para centro a origem das coordenadas. Quando a mudança de x em $-x$ e de y em $-y$ altera a equação proposta, este facto significa ou que a curva carece realmente de centro, ou então que este está collocado em outra parte que não na origem. Mas, como é sempre possivel tal propriedade analytica para com uma

certa origem si effectivamente a curva tem um centro, dissipar-se-ha de todo esta incerteza por meio de uma indeterminada deslocação de origem, substituindo $x+a$ e $y+b$ em logar de x e de y, afim de dispôr das constantes arbitrarias a e b assim introduzidas, para que a equação supporte sem alteração a mudança simultanea do signal das duas variaveis. Desde que esteja convenientemente satisfeita uma tal condição, a curva terá um centro cuja posição será determinada pelos valores correspondentes de a e de b. Ao contrario, si nenhum systema de valores reaes e finitos d'estas duas constantes tornar a equação susceptivel de tal aptidão, haverá tambem certeza de que a curva não tem centro.

Tão simples quanto geral, este methodo não convem menos ás equações transcendentes do que ás algebricas. Póde-se tambem verificar, por exemplo, com as curvas $y=\text{sen } x$, $y=\text{tang } x$, que todos os pontos, em numero infinito, em que ellas cortam o eixo dos x, constituem outros tantos verdadeiros centros, pois que, collocando ahi a origem pela substituição de x por $x+\pi$, $x+2\pi$,... $x+n\pi$, cada uma d'estas equações continuará a gozar da propriedade que caracterisa o centro. Com effeito, sendo estas curvas compostas de uma infinidade de partes identicas, segundo a periodicidade das funcções correspondentes, seria geometricamente impossivel achar a este respeito motivo algum de preferencia de qualquer d'estas intersecções a todas as outras.

Considerando em especial as curvas algebricas, póde-se formular melhor o methodo dos centros, apreciando d'ante-mão a influencia geral da mudança de signal das duas variaveis sobre as quatro especies de termos que ellas podem conter, segundo os typos Ax^m, By^n, Cxy, D. Os dous primeiros mudarão de signal ou não se alterarão, conforme fôr impar ou par o expoente da unica variavel que encerram. Quanto aos termos em que coexistem as variaveis, a regra será ainda a mesma, estimando o grau, como de costume, pela somma dos dous expoentes, porque, si este grau è impar, não terá variado um dos factores, e a mudança de signal do outro arrastará a do producto; si, pelo contrario, o grau é par, ou nenhum dos factores terá variado, ou terão ao mesmo tempo mudado de signal, de sorte que o producto jamais ficará alterado. Resulta d'esta apreciação que a equação não poderá supportar sem alteração a mudança elementar que caracterisa o centro, sinão emquanto os seus diversos termos forem

todos de grau impar ou todos de grau par, comprehendendo o termo constante entre os de grau par. E', pois, para fazer desapparecerem os termos de grau impar si fôr par o da equação, ou os termos do grau par si o da equação fôr impar, que é preciso destinar a deslocação de origem propria a determinar o centro, pois que de outra sorte o grau da equação não poderia variar.

Encarado o conjuncto dos casos, indica logo este methodo que a existencia de um centro é normal nas curvas do segundo grau, em que será mister eliminar só os dous termos da primeira potencia, o que de ordinario será possivel dispondo-se convenientemente das duas constantes arbitrarias a e b; só por excepção a curva não terá centro, quando tornarem-se infinitos os valores destas constantes. Ao contrario, porém, desde o terceiro grau e d'ahi em diante, as curvas providas de centro vão se tornando cada vez mais excepcionaes, por isso que o numero crescente de condições a prehencher excede progressivamente o numero fixo das quantidades disponiveis.

Quanto á situação geral do centro, resulta d'este methodo que em todas as curvas de grau impar o centro está inevitavelmente collocado sobre a curva, pois que, para ahi transportando a origem, o termo independente das duas coordenadas figura então entre os que devem desapparecer. Não sendo obrigatoria a suppressão deste termo si o grau é par, o centro poderá, pois, n'este caso deixar de pertencer á circumferencia da curva, sem que, no entanto, seja impossivel esta posição.

63.—Como todos os calculos exigidos pelo methodo precedente podem igualmente effectuar-se a despeito da indeterminação, não dos expoentes, mas dos coefficientes, poderemos applical-o, em sentido inverso, a formular as condições necessarias para que uma curva só conhecida de espe ie tenha o centro em um ponto dado. Si a e b designam as coordenadas d'este ponto, bastará operar na equação proposta $f(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots)=0$, a mudança então determinada de x e y em $x+a$ e $y+b$, com o fim de annullar em seguida o coefficiente total de cada um dos termos que devem assim desapparecer, o que fornecerá outras tantas relações proprias a especificar, conjunctamente com outras condições quaesquer, as constantes incognitas α, β, γ, δ, etc. N'uma equação do terceiro grau, por exemplo, em que será preciso supprimir os tres termos do segundo grau e a quantidade constante, estas relações

serão em numero de quatro, e tornar-se-hão tanto mais numerosos quanto maior fôr o grau da equação.

A respeito de tal augmento, importa dissipar a naturalissima objecção que parece a principio apresentar-se contra o principio geral, estabele ido no primeiro capitulo desta segunda parte, sobre a maneira por que os pontos singulares, de qualquer natureza que sejam, contribuem para a determinação das curvas. Segundo este principio, o centro de uma curva, como um ponto singular, jamais deveria dar lugar sinão a duas condições determinantes, ao passo que pela nossa apreciação especial parece dever ministrar quatro condições nas curvas do terceiro grau, seis nas do quarto, etc. Mas esta apparente contradicção só resulta de uma interpretação mui confusa pela qual se attribue á situação dada do centro o que provém unicamente de sua simples existencia, então mais ou menos excepcional. No terceiro grau, por exemplo, a existencia do centro, em qualquer logar que se ache, exige duas relações entre os cofficientes da equação geral ; estas relações, que completam a definição da curva, devem ser sempre tomadas em consideração, mesmo quando o centro não seja conhecido ; da mesma sorte, em sentido inverso, a ausencia do centro ministraria uma condição determinante para com uma curva do segundo grau. Portanto, si a curva do terceiro grau considerada é, com effeito, do pequeno numero das que têm centro, o que deve dar-se para que tal questão seja posta razoavelmente, achar-se-hão identicamente satisfeitas estas duas condições, e a posição do centro dado não fornecerá, em verdade, mais de duas relações entre os parametros desconhecidos. Porém, si ao contrario não se tivesse assim especificado a curva proposta, e estivessemos limitados a indicar o seu grau impondo-lhe um centro, as duas primeiras condições, independentes da situação especial do centro, embora não sejam então identicas, não representariam mais que um simples complemento de definição, indispensavel á natureza do problema e servindo para desenvolver assás uma circumstancia muito implicitamente supposta no enunciado. Em qualquer caso, a posição particular assignada ao centro jamais fornecerá por si mesma sinão duas relações determinantes, conforme a theoria fundamental do capitulo primeiro.

CAPITULO VI

THEORIA DA SEMELHANÇA DAS CURVAS

64.— A noção de semelhança convém evidentemente por natureza a todas as figuras possiveis, para com as quaes os observadores mais estranhos á geometria racional empregam diariamente as qualificações—semelhantes e dissemelhantes—,attribuindo-lhes um sentido vago e confuso talvez, mas no fundo essencialmente justo. Quando os geometras apoderaram-se especialmente desta concepção universal e espontanea, para systematisal-a convenientemente depois de tel-a claramente analysado, devêram considerar primeiro as figuras puramente rectilineas, cujos elementos, bem como as leis de sua reunião, são directamente apreciaveis. E' ahi que a semelhança mostra-se em plena evidencia como consistindo na igualdade dos angulos respectivos e na proporcionalidade dos lados homologos. Toda a elaboração scientifica não poude consistir, neste ponto, sinão em reduzir ao menor numero possivel as condições de uma tal definição ou apreciação, no começo para com os triangulos e em seguida para polygonos quaesquer, segundo as expl cações da geometria elementar. Mas trata-se agora de estender convenientemente ás diversas curvas planas estas noções primordiaes, a fim de descobrir em cada caso as condições precisas de semelhança, ou verificar que a identidade de especie não exige relação particular alguma, questão cuja alta importancia fôra superfluo encarecer expressamente.

Ao primeiro aspe to, parece não poder em geral operar-se tal extensão, a não ser pela analyse transcendente que, considerando as curvas como polygonos de infinito numero de lados infinitamente pequenos, permittiria exprimirir com toda distincção a igualdade directa dos angulos, e a proporcionalidade dos lados, sem embargo da natureza infinitesimal de uns e outros. Mas um exame mais aprofundado desta importante theoria geometrica conduz a reconhecer que a analyse ordinaria basta, na realidade, para instituil-a de um modo igualmente geral e muito mais commodo. Para isto é preciso apenas escolher convenientemente, entre as propriedades essenciaes dos poligonos semelhantes, as que são susceptiveis de tornar-se immediatamente apreciaveis nas curvas, sem exigir a

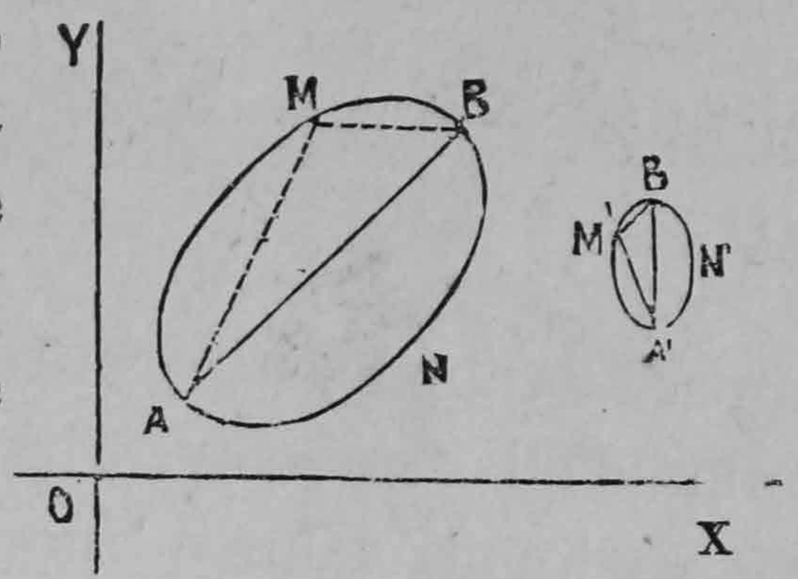
cons deração de lados infinitamente pequenos e de angulos infinitamente obtusos; e reduzir a noção inevitavel do infinito a não influir sinão sobre o numero dos vertices, ácerca dos quaes a uniformidade do seu caracter analyti o permitte superar facilmente uma tal difficuldade, pelo simples exame de um ponto ndeterminado proprio a represental-os todos, segundo um artific o logico já familiar, por muitos outros titulos, em geometr a anatytica.

A principio não podemos empregar neste mister indispensavel a proposição fundamental, mencionada com a maxima exclusão no ensino habitual da geometria elementar, sobre a decomposição dos polygonos semelhantes em triangulos tambem semelhantes. Com effeito, estendidas ás curvas, esta decomposição offereceria como a propria definição primitiva, ainda que em menor grau, o inconveniente capital de obrigar á consideração dos angulos e lados infinitesimaes. Porém, a theoria da semelhança das figuras rectilineas faz tambem conhecer a respeito dellas duas outras propriedades geraes, cada uma das quaes é por natureza eminentemente propria a estender-se ás curvas, como espontaneamente exemptas de tal vicio, de modo a poder depois fornecer mais ou menos commodamente base sufficiente á theoria analytica que desejamos instituir.

65.—Segundo a primeira destas propriedades, os contornos semelhantes têm seus diversos vertices determinados por triangulos respectivamente semelhantes, tendo todos em cada figura uma base commum, e, reciprocamente, duas figuras assim construidas são necessariamente semelhantes, qualquer que seja a relação das duas bases homologas. Desde que os lados e os angulos destes triangulos artificiaes, independentes da figura proposta, ficam naturalmente finitos quando o polygono torna-se nfinitesimal, nada impede de estender-se ás curvas um tal caracter, com a unica obrigação de ahi verifical-o para um ponto indeterminado, o que é sempre permittido pela uniformidade da definição geometrica ou analytica, afim de evitar o embaraço directo de um numero infinito de pontos. E' assim, por exemplo, que se demonstraria facilmente a semelhança constante de dous c rculos, sobretudo tomando por bases dous diametros respectivos; pois que os triangulos, desde então sempre rectangulos, seriam espontaneamente semelhantes, não comparando entre si, segundo o espirito d'este theore-

ma, sinão pontos para os quaes um dos angulos da base offerecesse de uma e outra parte a mesma grandeza.

Não será difficil formular analyticamente esta primeira theoria, quando no começo se tiver convenientemente adoptado bases homologas, cuja escolha poderá quasi sempre influir muito na simplificação dos calculos. Sejam $f_1(x, y)=0$, $f_2(x, y)=0$ as equações das duas curvas dadas da mesma especie, AMBN, A'M'B'N', (*fig. 37*) cuja semelhança se quer aprec ar. Depois de ter escolhido duas bases homologas AB, A'B', por exemplo, t rar-se-ha por uma extremidade A da primeira base uma recta AM que forme com ella um angulo arbitrario com uma tangente indeterminada *m*, o que nenhum embaraço offerece segundo a theoria analyti a da linha recta. Calculando-se em seguida as coordenadas do ponto M em que clla corta a curva, deduzir-se-ha, por meio da mesma theoria preliminar, a tangente da inclinação da base AB sobre a recta BM que passa na intersecção B ; a final de contas esta tangente será uma funcção determinada da constante arbitraria *m*. De um semelhante calculo para com a outra curva resultará uma segunda funcção analoga da mesma constante. Desde então, tendo sido tomados iguaes os angulos A e A', a semelhança exigirá a coincidencia destas duas funcções, qualquer que seja *m*, a fim de exprimir a igualdade necessaria dos angulos em B e B', e por conseguinte a semelhança continua dos triangulos MAB e M'A'B', para um ponto qualquer de cada curva comparado ao seu homologo na outra. Assim, as relações que puder exigir uma tal identificação entre as constantes das duas equações propostas, constituirão logo as condições de semelhança proprias ás curvas correspondentes ; e, si estas devessem ser sempre semelhantes pelo unico facto de pertencerem á especie dada, reconhecel-o-hiamos tambem verificando então a identidade espontanea das duas funcções obtidas.



(*Fig. 37*)

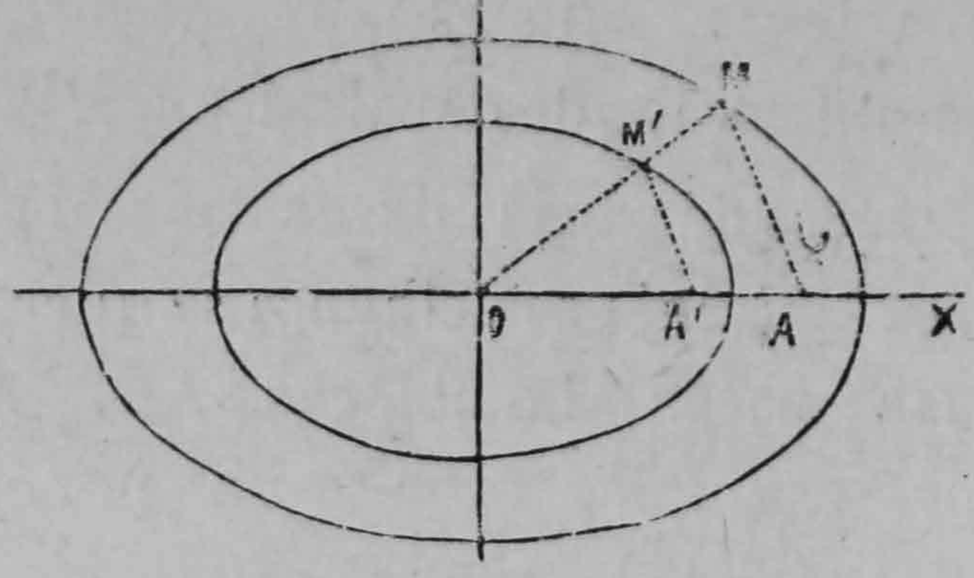
Supponhamos, por exemplo, que se tratasse de duas ellipses ou de duas hyperboles, segundo a definição do n. 19. Tomando para bases respectivas das duas series de triangulos as linhas OA e O'A (*fig. 38*), evidentemente homologas, que unem cada ponto fixo V

ou A' ao centro correspondente, e concebendo estas linhas como superpostas uma á outra, as equações das duas curvas, relativamente aos eixos usuaes, serão

$$c^2y^2+(c^2-d^2)x^2=\frac{c^2}{4}(c^2-d^2)$$

e

$$c'^2y^2+(c'^2-d'^2)x^2=\frac{c'^2}{4}(c'^2-d^2)$$



(*Fig. 38*)

cuja perfeita analogia permittirá effectuar o calculo prescripto sobre uma d'ellas somente. Tirando, pois, de O uma recta arbitrariamente inclinada sobre a base OA, sua equação será $y=mx$, e as coordenadas de sua intersecção M com a curva serão

$$x=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{c^2-d^2}{m^2c^2+c^2-d^2}},\qquad y=\frac{mc}{2}\sqrt{\frac{c^2-d^2}{m^2c^2+c^2-d^2}}.$$

A tangente da inclinação da base sobre a recta que une este ponto M á sua segunda extremidade A, nada mais será que o coefficiente angular desta linha MA, e, por conseguinte, ter-se-ha finalmente

$$\text{tang }\varphi=\frac{mc\sqrt{c^2-d^2}}{c\sqrt{c^2-d^2}-d\sqrt{m^2c^2+c^2-d^2}}.$$

Effectuando um calculo analogo para com a outra curva, será preciso, para que haja semelhança, que se tenha identicamente

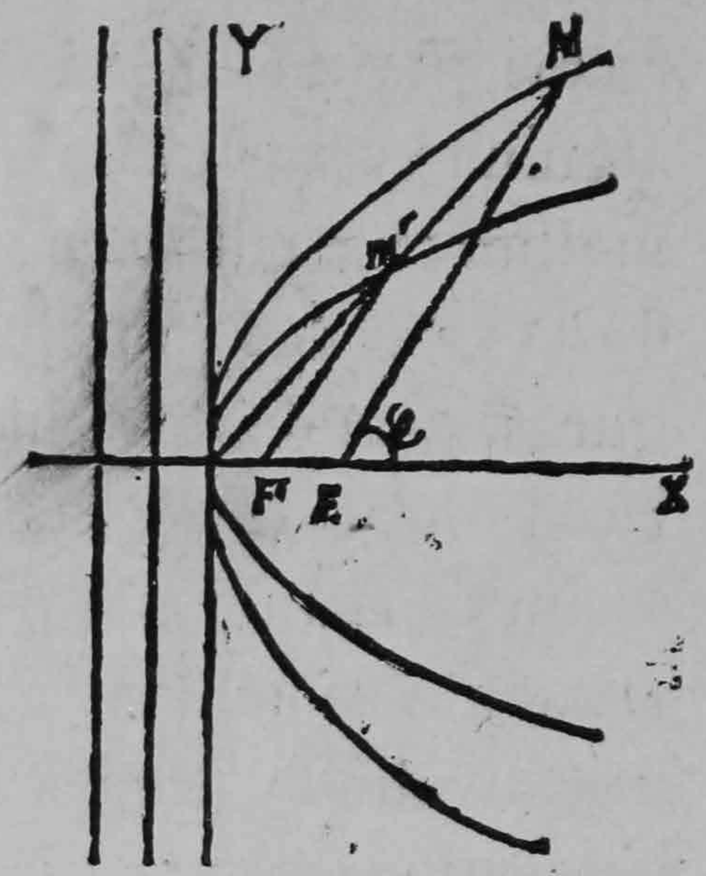
$$\frac{c\sqrt{c^2-d^2}}{c\sqrt{c^2-d^2}-d\sqrt{m^2c^2+c^2-d^2}}=\frac{c'\sqrt{c'^2-d'^2}}{c'\sqrt{c'^2-d'^2}-d\sqrt{m^2d'^2+c'^2-d'^2}}$$

qualquer que seja m. Ora, é facil verificar que tal identidade exige a condição $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$ Náo ha, pois, ellipses ou hyperboles semelhantes, sinão quando as duas distancias mencionadas na definição (19) destas curvas são respectivamente proporcionaes.

Consideremos ainda o exemplo da parabola, seguindo a defini-

ção do n. 20. Tomando para bases as rectas OF e OF' (*fig. 39*) que unem cada ponto fixo ao vertice, e fazendo-se de mais coincidirem os vertices e os eixos das duas parabolas, tirar-se-ha ainda da origem O uma recta arbitraria $y = mx$, cuja intersecção M com a primeira parabola $y^2 = 2dx$ dará $x = \frac{2d}{m^2}$, $y = \frac{2d}{m}$. Unindo este ponto M á outra extremidade F da base, ter-se-ha

$$\text{tang } \varphi = \frac{\frac{2d}{m}}{\frac{2d}{m^2} - \frac{d}{2}}.$$



(*Fig 39*)

Ora, este resultado não mudaria substituindo-se d por d' para a outra parabola, pois que é evidentemente independente de d. Portanto duas parabolas são sempre semelhantes entre si, como dous circulos. Seria facil verificar tambem que, com a equação $y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$, fazendo uma escolha conveniente das bases, a mesma cousa succede para as cissoides. Em fim, aproximando estes tres casos de semelhança espontanea, concebe-se *à priori* que é inevitavel uma tal relação em toda especie de curva cuja equação puder ser reduzida a conter apenas uma constante arbitraria; porque, si pudesse existir qualquer condição de semelhança, tenderia ella a determinar esta constante unica, de sorte que a curva semelhante á proposta achar-se-hia assim individualisada, o que evidentemente seria absurdo.

Tal instituição analytica da theoria geral da semelhança das curvas planas não tem outro defeito essencial, alem da muito grande complicação dos calculos exigidos, tratando-se de curvas pouco simples, e quando não se pode escolher bem a comodo as bases homologas. Tambem, afinal de contas, adoptaremos sobre o assumpto um outro methodo fundado sobre uma propriedade de mais facil formulação.

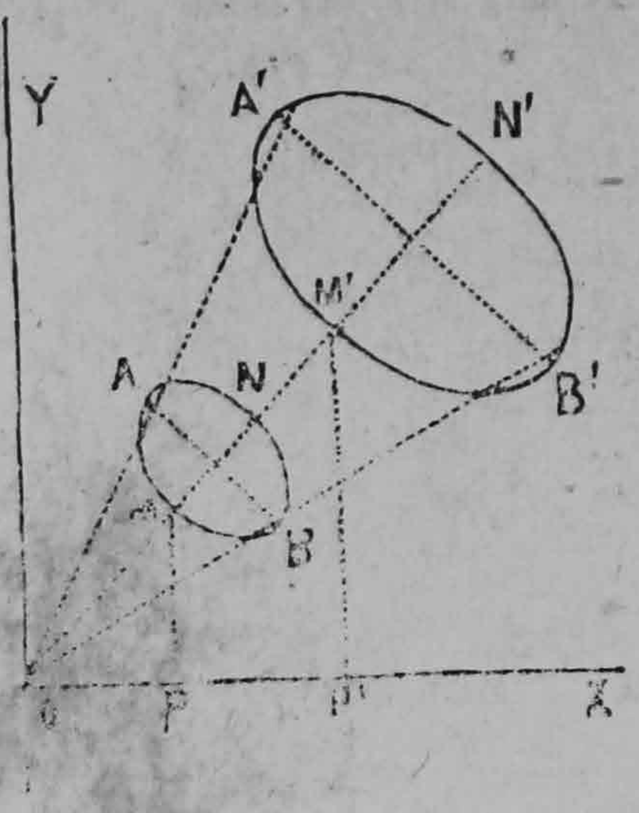
66.—Esta segunda propriedade geral dos contornos semelhantes refere-se á situação parallela em que podem ser collocados, em virtude

pa igualdade necessaria das respectivas inclinações, pois que basta girar um só lado parallelamente ao seu honologo, para que todos os outros por si mesmos girem tambem parallelamente aos seus. Ora, assim dispostos, sabe-se que, visto a proporcionalidade dos lados, as duas figuras offerecem logo a convergencia universal das rectas que unem todos os pontos homologos, em um ponto unico, algumas vezes chamado *centro de semelhança*, com quanto fosse melhor chamal-o *centro de homologia*. Em fim, os segmentos destas rectas comprehendidos entre este ponto e cada uma das figuras, estão então entre si em uma relação constante igual á relação linear dos dous contornos. Reciprocamente, duas figuras assim construidas a partir de um ponto qualquer, serão necessariamente semelhantes, quer se tenham disposto os pontos homologos dividindo proporcionalmente todos os raios, quer sejam elles determinados uns após outros segundo o parallelismo das cordas correspondentes. A condição fundamental de espontanea extensão ás figuras curvilineas é ainda evidentemente satisfeita, pois que assim evita-se directamente consideração infinitesimal differente da que é relativa ao numero de pontos a comparar, que por natureza não constitue difficuldade essencial alguma. Por exemplo, reconhece-se logo, de accordo com o segundo methodo a semelhança constante de dous circulos, como uma consequencia necessaria da difin ção ordinaria : basta para isso concebel-os concentricos.

Encarada geometricamente, tal propriedade offerece o grave inconveniente de confundir as relações de situação com as noções de semelhança que em si mesmas não poderiam depender destas relações. Ao contrario, sob o aspecto analytico, tal confusão não é de modo algum viciosa. Como as ideias de situação são as unicas que as nossas equações podem exprimir, conforme as explicações iniciaes deste tratado, é mesmo em virtude dessa reducção das condições de formas ás relaçoes de posição, que esta segunda theoria da semelhança adapta-se mais commodamente que a primeira á instituição analytica.

Basta para isso conceber as duas curvas semelhantes AMBN e A' M' B' N' (*fig.* 40) dispostas parallelamente, o que seria verificado pelo parallelismo das duas linhas homolcgas AB e A'B', e suppôr a origem das coordernadas posta no centro de semelhança ou, melhor, de *homologia* correspondente a esta situação. Vê-se

então que as coordenadas MP e M'P', OP e OP' dos dous pontos homologos quaesquer M e M' estarão necessariamente n'ma razão constante. Si, pois, x e y satisfazem a uma das equações, mx e my deverão por isso mesmo satisfazer á outra, tomando-se convenientemente a constante m. As duas equações propostas $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ deverão assim coincidir, mudando-se em uma dellas x em mx e y em my. Tal é o principio eminentemente simples da melhor theoria analytica da semelhança das curvas.



(*Fig. 40*)

Na verdade, si a verificação de um tal caracter analytico mostra em evidencia a semelhança das curvas correspondentes, não se poderia, em sentido inverso, assegurar sempre que a não verificação demonstre a dissemelhança effectiva, porquanto poderia isto tambem provir de que as duas figuras não estivessem parallelas, ou só mesmo de que a presente origem das coordenadas não se achasse no centro conveniente. Embora, porém, essa confusão primordial entre as relações de posição e as de forma deva em geral exigir, como vou explicar, novas operações analyticas para dissipar tal incerteza, importa não desconhecer que em muitos casos basta immediatamente o principio acima, uma vez que o estudo previo da especie de curvas proposta tenha já garantido a satisfação desta dupla condição preliminar relativa apenas á situação, o que será quasi sempre facil, toda vez que esta questão apresentar-se em tempo opportuno.

Si, por exemplo, trata-se de duas ellipses ou hyperboles definidas segundo o n. 19, é evidente que as equações

$$c^2y^2+(c^2-d^2)x^2=\frac{c^2}{4}(c^2-d^2)$$

e

$$c'^2y^2+(c'^2-d'^2)x^2=\frac{c'^2}{4}(c'^2-d^2)$$

referem-se a dous eixos semelhantemente dispostos em relação ás duas curvas, cada uma das quaes é symetrica em torno de cada um d'elles, de sorte que, em caso de semelhança, já se acham ellas em posição parallela, e a origem no centro de homologia cor

respondente. Mudando, pois, na primeira x em mx e y em my, e dispondo as equações de maneira a evitar toda e qualquer condição superflua, é preciso identificar as equações

$$y^2+\left(1-\frac{d^2}{c^2}\right)x^2=\frac{1}{4}\frac{c^2-d^2}{m^2}$$

e

$$y^2+\left(1-\frac{d'^2}{c'^2}\right)x^2=\frac{1}{4}(c'^2-d'^2),$$

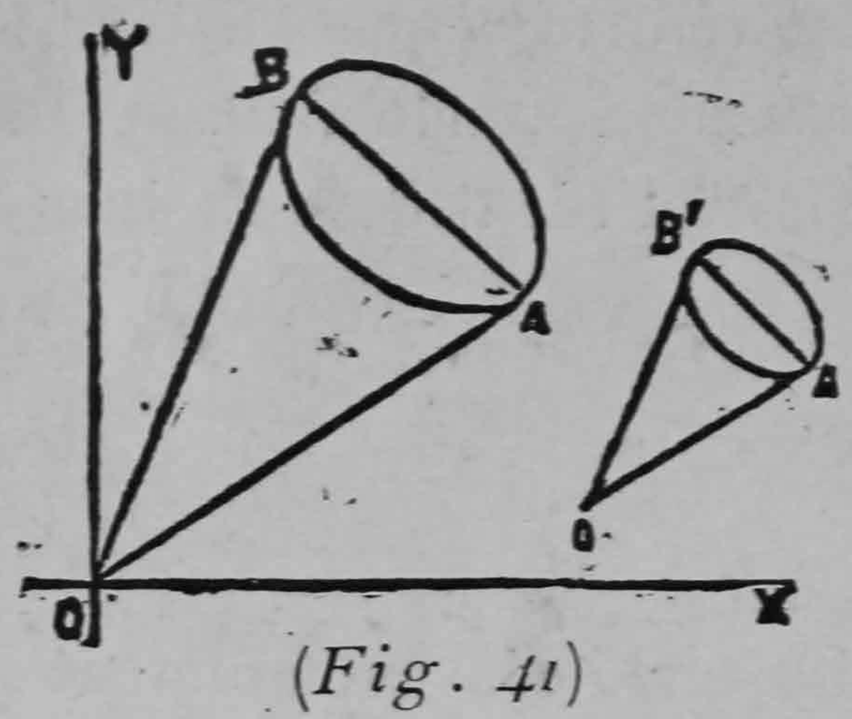
attribuindo-se a m nm valor conveniente. Ora, para fazer coincidirem os segundos membros, basta tomar $m=\sqrt{\frac{c^2-d^2}{c'^2-d'^2}}$, o que determina a relação linear das duas curvas. Mas a comparação dos primeiros membros mostra claramente que a relação $\frac{d}{a\,c}=\frac{d'}{c'}$ é necessaria e bastante para a semelhança, como o tinha cima indicado o primeiro methodo.

No caso da parabola. tomando as equações $y^2=2dx$ e $y^2=2d'x$ ainda estamos evidentemente certos de que as duas condições preliminares relativas á situação ficam sufficientemente satisfeitas pela coincidencia espontanea das duas linhas caracteristicas— o eixo e a tangente ao vertice— om as suas homologas. Torna-se então facil provar assim, mais commodamente que pelo outro methodo, que as duas curvas são sempre semelhantes. Mais penosa não seria a operação, si se tratasse de duas cissoides.

67.—Falta agora completar analyticamente a theoria definitiva da semelhança das curvas para os casos, possiveis mas pouco usuaes, em que, na carencia de indicações previas, as duas equações dadas não fossem de natureza a deixar suppor prehenchidas as condições preliminares relativas á situação. Cencebe-se em geral que o uso conveniente das formulas de transposição de eixos deverá ser bastante para reduzir estes casos aos precedentes.

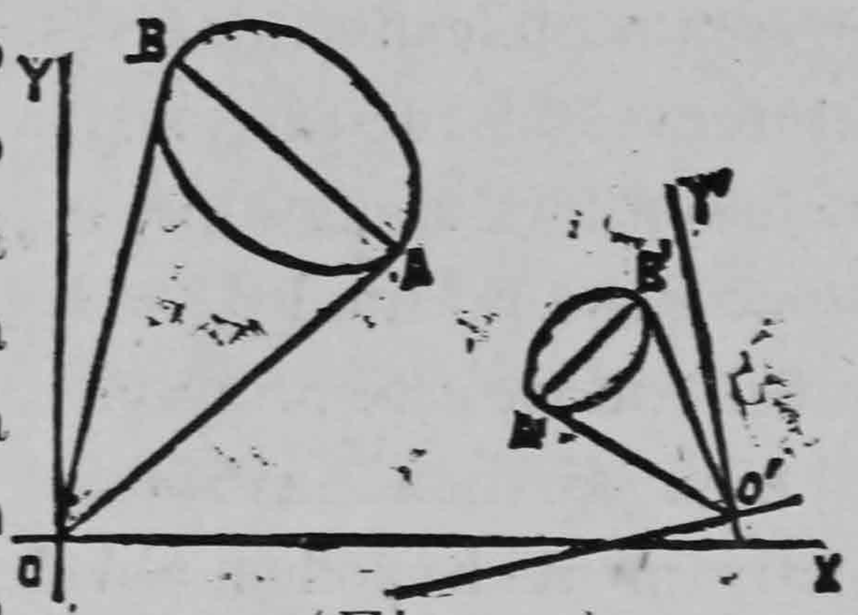
Para simplificar esta extensão gradual, supponhamos a principio que as curvas sejam ainda dispostas parallelamente, mas que a origem das coordenadás não esteja mais collocada no centro de semelhança correspondente, como na figura 41. Basta notar aqui que a propriedade analytica fundamental estabelecida no numero precedente não exige que as duas curvas sejam referidas á

mesma origem, e que necessariamente teria logar do mesmo modo para duas origens simplesmente homologas. Por conseguinte, haverá uma certa origem O', facil de determinar geometricamente, para a qual a segunda equação $f_2(x,y)=0$ deverá coincidir com a primeira, em virtude da mudança caracteristica de x em mx e de y em my. Em vez de calcular d'antemão, seguindo a construcção natural, a posição deste ponto, disposto para com a segunda curva da mesma maneira que a origem primitiva O a respeito da primeira, é preferivel que ella surja a final da propria operação analytica. Limitar-nos-hemos, pois, a operar, em relação a uma das curvas, uma deslocação indeterminada de origem, e tentaremos ao depois fazer coincidirem as duas equações $f_1(mx,\ my)=0$, $f_2(x+a,\ y+b)=0$, por meio de valores convenientes attribuidos ás constantes arbitrarias m, a e b que representam, aquella—a relação linear das duas curvas, estas—as coordenadas do ponto relativo á segunda curva, homologo á posição da origem actual da primeira. As relações necessarias a esta indentificação constituirão as condições de semelhança procuradas, si, todavia, estamos previa e sufficientemente certos do effectivo parallelismo das curvas propostas.



(*Fig. 41*)

Consideremos em fim o caso mais geral, em que as curvas não sejam mesmo paralellas, como na figura 42. Construindo sobre A'B' homologa de AB, um triangulo OAB, determinaria elle a principio um ponto O' disposto em relação á segunda curva da mesma maneira que a origem actual O a respeito da primeira. Si deste ponto se tiram eixos O'X', O'Y' que façam com A'B' os mesmos angulos que formam os eixos primitivos OX, OY com AB, é claro que, generalisando o quanto possivel a concepção da propriedade fundamental do numero anterior, a equação da segunda curva relativamente a este novo systema de eixos não deverá, em caso de semelhança, differir da da primeira



(*Fig. 42*)

sinão pela mudança tambem sempre caracteristica de x em mx e de y em my.

Assim, sem d'ante-mão procurar a situação deste systema, operar-se-ha em uma das equações uma transposição de eixos indeterminada, que affcte ao mesmo tempo a direcção e a oriegm, mas conservando a mesma inclinação, e examinar-se-ha si torna-se possivel identificar as duas equações

$$f_2(x' \cos X' - y' \operatorname{sen} X' + a,\ x' \operatorname{sen} X' + y' \cos X' + b) = 0,$$

e

$$f_1(mx,\ my) = 0,$$

dispondo convenientemente das quatro constantes arbitrarias m, a b, e X', cujos valores, de modo algum estranhos á questão, determinarão a relação linear das duas curvas, e ao mesmo tempo farão conhecer exactamente em que consiste a diversidade effectiva de suas situações actuaes. Todas as relações indispensaveis a esta coincidencia constituirão aqui condições necessarias para a semelhança das curvas propostas, cuja disposição mutua é agora inteiramente qualquer.

6ª.—Seja qual fôr a theoria analytica ou mesmo geometrica que se julgue dever empregar relativamente á semelhança das curvas, importa sentir em geaal que é mister sobretudo dirigil-a, em cada caso, á determinação do numero necessario de condições distinctas, por quanto é nisso que consiste realmente a principal difficuldade de um tal estudo. Uma vez conhecido este numero, deve-se considerar de importancia secundaria a forma actual sob que assim se apresenta cada uma dessas condições de semelhança, a qual, pela natureza do assumpto, comporta necessariamente muitas transformaçòes ulteriores, sempre sujeitas d'ante-mão a um principio commum. Resumo final de todas as propriedades relativas ás figuras semelhantes, este principio consiste na proporcionalidade universal e na igual inclinação das diversas rectas homologas que respectivamente se podem ahi considerar, o que constitue uma simples extensão da definição elementar, desde então appli ada indistinctamente a todas e quaesquer rectas, transversaes ou lateraes, inherentes a cada figura. Assim, toda condição de semelhança poderá tomar duas sortes de formas, uma linear, outra angular, conforme seja conceb da como relativa a uma proporção de comprimentos, ou a uma igualdade de angulos, comportando de mais cada um

destes modos tantos enunciados distinctos, quantas combinações binarias se puderem instituir entre as rectas caracteristicas. Mas estas diversas expressões de uma e outra especie serão por natureza essencialmente equivalentes, com quanto mais ou menos convenientes, e é preciso habilitarmo-nos a trocal-as directamente, segundo as conveniencias de cada caso, sem jamais preoccupar-nos a este respeito nenhuma redacção exclusiva. Si, pois, o mothodo analytico não apresenta no começo as condições de semelhança sob forma bastante clara, não deve isto affligir-nos, pois que a natureza das curvas propostas fornecerá immediatamente enunciados quasi sempre preferiveis, por pouco que ellas tenham sido previamente estudadas. Ora, na maior parte dos casos, esta reflexão geral é eminentemente propria a simplificar muito a applicação effectiva da theoria da semelhança, porque, limitando-nos assim a deduzir sobretudo o numero de condições, contentar-nos-hemos muitas vezes com o simples esboço dos calculos prescritos, sem ter necessidade de executal-os estrictamente.

Por exemplo, segundo a theoria geral do numero precedente, é facil sentir que, com duas equações completas do segundo grau, contendo cinco termos variaveis, exigirão as curvas correspondentes só uma condição de semelhança, pois que então o numero de termos a identificar só excede de uma unidade ao numero universal das constantes disponiveis para esta coincidencia. Quanto á natureza desta unica condição, não faria a inteira execução do calculo sinão apresental-a sob forma penivel que é inutil conhecer. Mais tardo examinaremos os diversos enunciados especiaes, lineares ou angulares, que convirá applicar então directamente.

69.—Para mais aperfeiçoar a theoria geral da semelhança das curvas planas, faz-se mister addicionar agora uma importante consideração subsidiaria que, judiciosamente applicada, dispensará ás vezes toda operação analytica, permittindo deduzir a solução só e immediatamente da definição das linhas propostas. Respousa este methodo auxiliar sobre o feliz esboço, indicado por Clairaut nos seus elementos de geometria, e segundo o qual duas figuras semelhantes só differem entre si pela escala em que são construidas, de sorte que uma simples mudança de escala poderia tornal-as capazes de coincidencia. Embora não tivesse Clairaut em vista sinão as figuras rictilineas, convem igualmente este judicioso enunciado, sem nenhuma preparação especial, ás diversas figuras curvilineas. De-

vemos consideral-o como a mais concisa expressão de todas as approximações geometricas a que pode dar logar a semelhança.

Segundo este principio, consistirá o trabalho a executar sobre cada definição proposta de uma especie de curva, para n'ella descobrir as condições de semelhança, em separar bem desde o começo os dados, lineares ou angulares, indispensaveis á grandeza da curva, d'aquelles que só affectarem a situação desta, e ao depois em reduzir os primeiros ao menor numero possivel. Esta dupla preparação apresenta algumas vezes, mórmente sob o segundo aspecto, difficuldades insuperaveis em certas curvas, nas quaes não se poderá evitar a este respeito o emprego ulterior do methodo analytico, que conserva, pois, necessariamente seu privilegio exclusivo de inteira generalidade. Mas, quando estiverem sufficientemente prehenchidas estas duas condições preliminares, o principio de Clairant fornecerá para logo a solução pedida. Em verdade, si a grandeza da curva é assim determinavel por meio de uma só dimensão, todas as curvas desta especie são necessariamente semelhantes entre si, pois que a simples mudança de escala poderia fazel-as coincidirem, identificando suas dimensões respetivas. Quando forem necessarios muitos dados distinctos e independentes, exigirá a semelhança tantas condições quantas forem estes elementos menos um, e cada uma dellas consistirá naturalmente na proporcionalidade das linhas consideradas, ou na igualdade dos angulos introduzidos, salvo a attribuir-se-lhe em seguida outra qualquer forma, linear ou angular, que se julgue preferivel, segundo a faculdade de transformação explicada em o numero anterior.

Com effeito a mudança de escala não poderá então identificar mais de uma dimensão respectiva, e as curvas só serão semelhantes si a primeira coincidencia arrastar a de todos os outros elementos, o que evidentemente suppõe a proporcionalidade universal dos comprimentos propostos ou igualdade mutua dos angulos considerados. Vê-se que uma tal marcha reduz-se, em outros termos, a deduzir as condições de semelhança das de identidade, considerando, de um lado, que o numero de umas deve ser sempre inferior de uma unidade ao das outras, e, de outro lado, que as diversas igualdades lineares ao mesmo tempo prescritas por estas devem, qara aquellas, mudar-se em s mples proporcionalidades.

Este methodo subsidiario faria logo descobrir a semelhança

constante, já verificada analyticamente, nos diversos casos do circulo, da parabola, da cissoide, etc. ; ensina-nos alem disso que a mesma relação se estenderá ás curvas derivadas destas primeiras de um modo determinado aliás qualquer, como o são do circulo a cycloide, a epicycloide, as curvas de Descartes (26), etc. Ao contrario, as ellipses ou as hyperboles, segundo a definição do n. 19, só serão semelhantes em quanto houver proporc onalidade entre as duas extensões, evidentemente independentes e irreductiveis, que determinam a grandeza da curva, abstracção feita da situação. Assim, a definição commum das tres secções conicas (23) exigirá, para que haja semelhança, a igualdade da relação especifica correspondente. A cerca das definições da conchoide ou das secções tóricas, achar-se-hão sem mais embaraço resultados analogos.

As condições preliminares proprias a garantir o successo deste methodo subsidiario são da mesma natureza das relativas ao methodo correspondente, admittido pela theoria do numero de pontos determinante. Cumpre notar, porém, que este indispensavel preambulo é aqui mais difficil e incerto para com algumas definições igualmente antipathicas aos dous processos supplementares ; pois agora é necessario operar, alem do mais, uma separação muitas vezes delicada e algumas impossivel, entre as idéas de grandeza e as de situação. E' assim, por exemplo, que as definições do circulo, quer como segmento capaz, quer como logar dos pontos cujas distancias a dous pólos são constantemente proporcionaes, de modo algum permittiriam verificar, por este meio, a semelhança necessaria de todos os circulos, pois que parecem exigir dous dados distinctos para determinar a grandeza da curva, bem que deva uma apreciação ulterior, que em geral só a equação pode dirigir com segurança, mostrar que, a este respeito, só é indispensavel uma certa combinação unica destes dous elementos em apparencia irreductiveis. Mas a irrecusavel evidencia dos erros que, para com curvas pouco estudadas ou muito complicadas, podesse produzir irreflectida applicação deste methodo subsidiario, não alteraria sua incontestavel efficacia nos casos que se lhe adaptam sufficientemente.

CAPITULO VII

THEORIA DAS QUADRATURAS

70.—Seria aqui superfluo fazer expressamente realçar a alta importancia geral desta theoria, directamente relativa ás questões sobre a medida da extensão, em que sobretudo reside a distincção final de conjuncto dos estudos geometricos de que todas as outras partes não são, a este respeito, sinão preambulos indispensaveis, quer para preparar a solução effectiva, quer para dirigir a applicação ulterior. Além da medida das arias planas curvilineas, comprehende em geral esta theoria as tres ordens de questões fundamentaes designadas sob as denominações caracteristicas de — quadraturas, rectificações e cubaturas—, expressões muito proprias a recordar a transformação definitiva da aria proposta em um quadrado, da circumferencia dada em uma recta, e do volume considerado em um cubo, resultado natural de toda medida geometrica. Judiciosa preponderancia do ponto de vista analytico tem conduzido os geometras modernos, como se explicará neste capitulo, a conceberem estas diversas investigações geraes como essencialmente equivalentes, a ponto de, á vontade, poderem entrar umas nas outras, ao passo que a geometria antiga não tinha podido descobrir d'entre ellas mais do que uma analogia vaga e insufficiente. Mas o titulo desta grande theoria deve, entretanto, ser sempre tirado do problema das quadraturas, que constitue a forma sob a qual esta questão commum é mais simplesmente accessivel aos processos analyticos.

De modo por demais exclusivo, taes problemas são hoje concebidos como jamais podendo ser tratados sinão pela analyse transcendente. Embora, nos casos um pouco complicados, seja sem duvida esta analyse indispensavel á solução delles, não é d'ella que deriva na realidade o esboço, mesmo analytico, desta theoria geral. Está agora demasiadamente esquecida a phase rapida, mas immorredoura, que apresenta a historia da geometria moderna, desde a fundação da analytica por Descartes até a descoberta da analyse infinitesimal por Leibnitz. Neste memoravel intervallo, muitos geometras, e sobretudo Wallis, concorreram felizmente para desenvolver e systematisar de mais em mais a

theoria geral das quadraturas só com os recursos da analyse ordinaria ; e foi principalmente para aperfeiçoar os primeiros esforços que criou-se em segnida o calculo integral, ao passo que o progresso da theoria das tangentes conduzia ao calculo d fferencial. Muito importa que a marcha individual da iniciação geometrica continue sempre conforme com esta gradação espontanea do desenvolvimento historico, caracterisando aqui com cuidado os meios que a este respeito comporta a analyse elementar, e que, embora mais limitados do que para com todas as questões anteriores, são contudo muito mais extensos do que presentemente se pensa, sem demais alterar esta indispensavel exposição por nenhuma vã introducção disfarçada da analyse transcendente.

Para pôr o problema das quadraturas sob a forma mais accessivel a toda analyse, é preciso reduzir as arias a medirem-se ao simples trapezio curvilinio MPM'P' *(fig. 43)* comprehendido entre duas ordenadas quaesquer MP, M'P' e as partes interceptadas PP', MM', tanto do eixo como da curva proposta. A quadratura de um tal espaço conduzirá facilmente á do segmento propriamente dito, encerrado entre um arco de curva e sua corda, procedendo por subtracção a respeito do trapezio rectilineo correspondente .

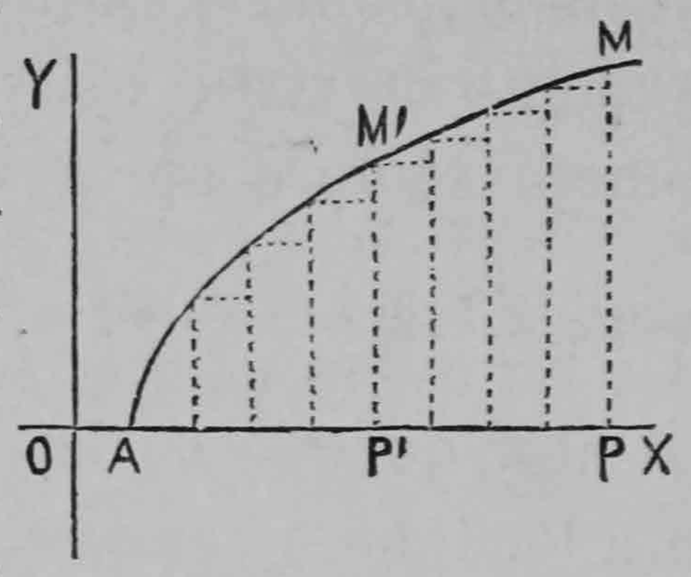


Fig. 43)

Uma vez medido este segmento, poder-se-ha em geral avaliar a aria de qualquer polygono formado arbitrariamente de arcos de curvas analogas ou heterogeneas ; pois que, depois de ter estimado o polygono rectilineo resultante das cordas de todos estes arcos quaesquer, bastará evidentemente addicionar ao resultado os segmentos concavos e subtrahir os convexos. O mais das vezes poderemos até simplificar ainda um pouco a forma do problema fundamental, limitando-nos a quadrar o triangulo curvilineo AMP, que conduzirá ao trapezio M'P'MP, subtrahindo um de outro os dous espaços triangulares relativos ás duas ordenadas extremas.

Isto posto, o espirito geral do methodo das quadraturas, espontaneamente manifestado pelo grande Archimedes para com alguns casos caracteristicos, desde os primeiros assomos das altas especulações geometricas, consiste em conceber a aria curvilinea pedida como o limite a que tende uma certa aria rectilinea, inscripta ou

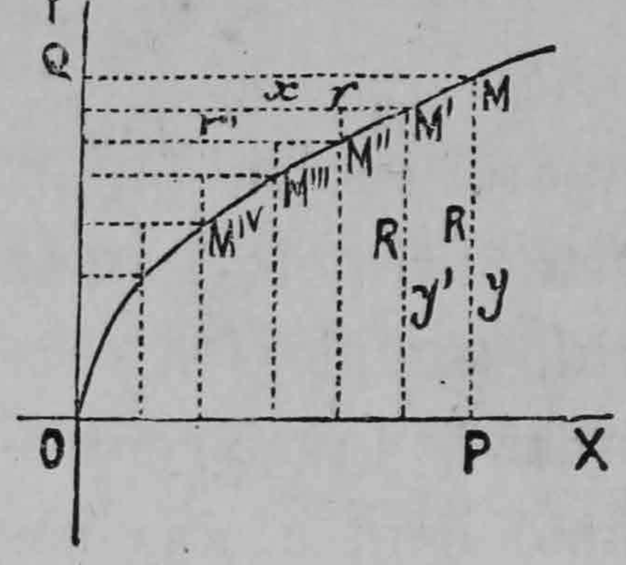
circumscripta, á medida que suas partes tornam-se infinitamente menores e mais numerosas; pois que as figuras rectilineas são as unicas immediatamente apreciaveis. Por exemplo, si, para mais facilidade, se divide a base AP' ou PP' do segmento proposto em n partes iguaes, e se levantam as ordenadas correspondentes y_1, y_2, y_3, etc., tirando-se em seguida da extremidade superior de cada uma d'ellas uma parallela ao eixo prolongada até a ordenada seguinte, substituir-se-ha á aria AM'P' ou M'P'MP a somma dos rectangulos assim formados, e o limite desta somma, $\frac{x}{n}(y_1+y_2+y_3+\ldots\ldots+y)$, determinará a aria procurada, quando n torna-se infinito. Toda a difficuldade desta investigação consiste, pois, em descobrir em cada caso a expressão deste limite, para o que não possuiam os antigos sinão recursos puramente especiaes e limitadissimos, como acontecia com as outras especulações geometricas. Do ponto de vista analytico concebe-se em geral que este limite começa sempre apresentando-se sob forma inteiramente indeterminada, tal como $0\times\infty$, ou $\frac{\infty}{\infty}$, ou outro qualquer symbolo equivalente, quando se introduz de chofre a hypothese de n infinito, sem ter tido sufficientemente em vista a equação proposta. Assim, sob este aspecto, a questão fundamental das quadraturas é sempre reductivel afinal a um simples problema de analyse, que consiste em transformar, segundo a lei das ordenadas para com as abscissas, a fracção $\frac{y_1+y_2+y_3+\ldots+y}{n}$ em outra equivalente que não se torne indeterminada para n infinito. Já tivemos occasião de ver uma transformação semelhante, quando reduzimos a pesquiza das tangentes a um problema analogo sobre a fracção $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, mas agora ella apresenta, por sua natureza, muito maior embaraço do que então.

Não pode a analyse ordinaria superar immediatamente esta difficuldade caracteristica, sinão só para as curvas ditas *paraboli-cas*, nas quaes uma potencia qualquer da ordenada é proporcional a uma outra da abscissa. A principio supporemos mesmo que uma das coordenadas está na primeira potencia, de sorte que a equação

seja $y = ax^m$. Todavia, partindo deste caso primordial, o feliz principio de extensão posto por Wallis perm ttir-nos-ha proceder em seguida á inteira solução do problema para com muitas outras curvas.

Este caso fundamental pode ser tratado segundo dous methodos mui differentes, que é mister explicar successivamente, um mais simples porém, no fundo, mais limitado, o outro mais difficil porém de muito maior extensão, e afinal o unico susceptivel de verdadeira generalidade.

71.—No primeiro, a forma da solução consiste em procurar a relação entre os dous segmentos complementares OMP e OMQ (*fig. 44*), que tem as bases sobre osdous eixos. O conhecimento desta relação conduzirá logo á determinação do segmento proposto OMP, pois que a somma dos dous segmentos equivale ao rectangulo conhecido OMPQ, formado pelas duas coordenadas extremas.



(*Fig. 44*)

Para achar esta relação, concebamos substituida a cada segmento uma serie conveniente de rectangulos, segundo a construcção acima indicada, mas sem fixar ainda o modo de successão dos vertices intermedios M', M'', M''', etc., dos quaes só o numero deve sempre ficar indefinido. Consiste sobretudo o espirito deste primeiro methodo em aproveitar uma tal faculdade para simplificar a expressão da relação das duas series, de maneira que seu limite torne-se distinctamente apreciavel. Chamando-se x' e y', x'' e y'', etc. as coordenadas intermediarias, R e r, R' e r', etc. as duas sortes de rectangulos parciaes, a primeira relação elementar será evidentemente expressa pela formula

$$\frac{R}{r} = \frac{y'(x-x')}{x'(y-y')}.$$

Si, combinando-a com a equação proposta $y = ax^m$, eliminam-se as ordenadas, ella torna-se a principio

$$\frac{R}{r} = \frac{x'^{m-1}(x-x')}{x^m - x^m}$$

Ora, a natureza da questão exige evidentemente a suppressão do factor commum $x-x'$ que, annullando-se no limite, deixaria in-

determinada a relação parcial, e por conseguinte a total. Depois de o haver aniquilado, tem-se

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\left(\frac{x}{x'}\right)^{m-1}+\left(\frac{x}{x'}\right)^{m-2}+\ldots\ldots+\left(\frac{x}{x'}\right)+1}.$$

As outras relações parciaes $\frac{R'}{r'}$, $\frac{R''}{r''}$, etc., seriam expressas por formulas analogas, procedendo semelhantemente segundo as potencias de $\frac{x'}{x''}$, $\frac{x''}{x'''}$, etc. Para deduzir a relação total,

$$\frac{R+R'+R''+\ldots.}{r+r'+r''+\ldots.},$$

importa notar (e é nisto que consiste o artificio fundamental deste primeiro methodo) que sua formação tornar-se-hia muito simples, si estas diversas relações elementares podessem tornar-se iguaes entre si, pois que a relação da somma coincidiria então com a das partes. Ora, esta igualdade é aqui plenamente facultativa como exigindo só a relação $\frac{x}{x'}=\frac{x'}{x''}=\frac{x''}{x'''}=\ldots.$, o que reduz-se a distribuir os pontos intermediarios M', M'', M'', etc. de tal sorte que suas abscissas, e por conseguinte suas ordenadas tambem, decresçam em progressão geometrica, sem aliás fixar a razão desta progressão, de modo a poder multiplicar indefinidamente estes vertices, approximando q da unidade que constitue o seu limite. Tem-se, pois, nesta hypotese

$$\frac{R+R'+R''+\ldots}{r+r'+r''+\ldots}=\frac{1}{q^{m-1}+q^{m-2}+q^{m-3}+\ldots+q+1}.$$

Passando ao limite, onde $q=1$, resulta logo para a relação procurada dos dous segmentos, OMP e OMQ, a formula $\frac{S}{s}=\frac{1}{m}$, que, combinada com a da somma delles, conduz finalmente á lei geometrica $S=\frac{1}{m+1}xy$, d'onde derivaria immediatamente a quadratura graphica, e em seguida a lei analytica $S=\frac{ax^{m+1}}{m+1}$, sobre a qual mais importa demorar a nossa attenção. Aqui vê-se que, para deduzir da funcção relativa á ordenada a que exprime a

aria, basta augmentar de uma unidade o expoente da primeira e dividil-a por este expoente assim augmentado. Sendo esta operação algebrica precisamente o inverso da exigida para formar a funcção derivada propriamente dita, pode-se emfim redigir a lei analytica das quadraturas sob esta forma mais concisa: a funcção relativa á ordenada é a derivada da concernente á aria. Demais a analyse transcendente mostra que tal enunciado não constitue somente, como devemos pensar a principio, um modo mais succinto de exprimir o resultado algebrico da solução actual, mas que encerra directamente a mais geral expressão da lei fundamental das quadraturas, que em qualquer curva consiste, com effeito, em ser sempre a ordenada a derivada da aria.

Todo leitor judicioso já tem sem duvida sentido espontaneamente, na exposição precedente, a notavel analogia que apresenta este primeiro methodo elementar das quadraturas com o primeiro tambem elementar das tangentes, de modo a deprehender uma verdadeira affinidade analytica entre as duas principaes das nossas theorias geraes, que, de facto, não podem ser convenientemente generalisadas sem intervir a analyse infinitesimal de um modo equivalente, com quanto distinctissimo, de uma á outra destas duas theorias. Além da conformidade fundamental, acima indicada, entre os dous problemas analyticos correspondentes, vê-se que a elaboração algebrica repousa semelhantemente sobre a divisão de $a^m - b^m$ por $a - b$, e que os dous resultados combinam-se naturalmente para introduzir em geometria, por caminhos differentes, a grande consideração das derivadas.

Para dar a este primeiro methodo a maior extensão possivel, faz-se agora mister explicar a modificação algebrica, segundo a qual permitte o mesmo artificio geometrico abordar com igual exito o caso mais geral da equação $y^m = ax^n$, em que os dous expoentes são inteiros e positivos, porém quaesquer. Eliminando-se a ordenada, a relação elementar $\frac{R}{r}$ torna-se então

$$\frac{R}{r} = \frac{a^{\frac{l}{m}} x^{\frac{n}{m}} (x - x')}{x' \left(a^{\frac{l}{m}} x^{\frac{n}{m}} - a^{\frac{l}{m}} x'^{\frac{n}{m}} \right)}.$$

A unica difficuldade nova está na impossibilidade immediata de

eliminar o factor que, no limite, annulla simultaneamente os dous termos desta fracção. Ora, dissipa-se com facilidade um tal embaraço por uma simples preparação algebrica, que consiste em desfazer-se dos expoentes fraccionarios por meio do expediente ordinario pondo $x=t^m$, $x'=t'^m$, sem que demais seja preciso preoccuparmo-nos do sentido geometrico das variaveis auxiliares t e t', que em breve vão desapparecer. Esta transformação dá logo a formula

$$\frac{R}{r}=\frac{t'^n(t^m-t'^m)}{t'^m(t^n-t'^n)},$$

em que pode-se, como acima, tirar desde então o factor vicioso $t-t'$, donde

$$\frac{R}{r}=\frac{t'^n(t^{m-1}+t^{m-2}t'+\ldots+t'^{m-1})}{t'^m(t^{n-1}+t^{n-2}t'+\ldots+t'^{n-1})}.$$

Como no primeiro caso, não depende no fundo esta expressão sinão da relação $\frac{t}{t'}$, segundo a lei

$$\frac{R}{r}=\frac{\left(\frac{t}{t'}\right)^{m-1}+\left(\frac{t}{t'}\right)^{m-2}+\ldots+1}{\left(\frac{t}{t'}\right)^{m-1}+\left(\frac{t}{t'}\right)^{n-2}+\ldots+1}.$$

Por meio de tal preparação as relações parciaes tornar-se-hão ainda iguaes, si se põe $\frac{t'}{t}=\frac{t''}{t'}=\frac{t'''}{t''}=\ldots\ldots$, o que se reduz, como d'antes, a fazer decrescerem as coordenadas intermediarias em progressão geometrica. Ter-se-ha, pois, para a relação total a expressão

$$\frac{R+R'+R''+\ldots}{r+r'+r''+\ldots}=\frac{q^{m-1}+q^{m-2}+\ldots+1}{q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1},$$

que, no limite, dá $\frac{S}{s}=\frac{m}{n}$, donde resulta geometricamente

$$S=\frac{m}{m+n}xy,$$

o que a conduz, tão commodmente como acima, á quadratura graphica, e, em seguida, analiticamente

$$S = a \frac{x^{\frac{l}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1}$$

Este ultimo resultado mostra claramente que a lei de formação algebrica, no começo estabelecida sobre a equação $y = ax^m$ para ahi paasar da ordenada á aria, se extende exactamente á equação $y^m = ax^n$, pondo-se esta sob a mesma forma com o auxilio dos expoentes fraccionarios, com os qnaes se operaria como se fôssem inteiros. Assim, os dous casos de quadratura, a que é immediatamente applicavel este primeiro methodo, chegam a final a um mesmo enunciado analytico.

72.—Consiste o segundo methodo em tratar directamente a questão analytica que introduz naturalmente o problema das quadraturas, segundo a formula geral (70),

$$S = x \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y}{n}$$

buscando a expressão da somma dos valores que toma a funcção relativa á ordenada, para uma serie de valores, $\frac{x}{n}, 2\frac{x}{n}, 3\frac{x}{n}, \ldots n\frac{x}{n}$, da variavel, o que equivalerá em cada caso á sommação de uma certa serie de numeros. Sob este aspecto, a sommação das series adquire logo uma alta importancia geometrica, pois que, desde que se tem chegado a sommar uma serie qualquer, pode-se dahi deduzir immediatamente a quadratura d'uma certa curva. Desgraçadamente os nossos conhecimentos a este respeito são hoje imperfeitissimos, e sel-o-hão necessariamente para sempre, em virtude da grande difficuldade que apresenta este genero de especulações analyticas, quando nos afastamos das mais simples progressões. Tambem o principal vicio desta marcha eminentemente natural e plenamente geral, que foi em essencia a de Wallis e seus contemporaneos, consiste em exigir inutilmente a pesquiza completa de uma tal sommação, com quanto sua expressão total

não deva influir no resultado pedido, pois que no limite desapparecerão a maior parte dos termos, sem que contudo possamos actualmente apartar os unicos que na realidade devem affectar este limite, que entretanto constitue o unico objecto das quadraturas. O previlegio essencial da analyse transcendente consiste, a este respeito, em abordar directamente a determinação exclusiva de tal limite, abstracção feita da sommação effectiva, que apresenta muito mais difficuldade e que não é verdadeiramente accessivel sinão em muito menor numero de casos. Mas aqui devemos acceitar a questão com todas as complicações superfluas que naturalmente apresenta, e apreciar assim os recursos que,a este respeito, comporta a mais elementar analyse em relação ás curvas da especie $y=ax^m$, em que m é inteiro e positivo; todavia é possivel afastar, na exposição, o inutil desenvolvimento dos termos da formula sommatoria, que evidentemente se mostrassem desprovidos de toda influencia sobre o limite procurado.

Neste caso tem-se

$$S=\frac{ax^{m+1}(1+2^m+3^m+4^m+\ldots.+n^m)}{n^{m+1}},$$

e a questão se reduz a sommar as potencias m dos numeros naturaes 1, 2, 3,... n, afim de comparar esta somma a n^{m+1}, para tomar o valor desta relação quando n é infinito. Bem que, na realidade, não exija esta pesquiza algebrica cousa alguma a cima dos primeiros elementos de algebra, não tem-se ainda o costume de tratal-a; de sorte que, si eu não a explicasse aqui succintamente, temeria não ser assaz comprehendido pelo leitor que não tivesse estrictamente recebido sinão o grau preciso de preparação analytica, proclamado no prologo como indispensavel ao estudo deste tratado.

Para determinar, em geral, a somma das potencias m de uma serie de n numeros a, b, c, ... k, l, em progressão arithmetica cuja razão seja r, basta elevar á potencia $m+1$ cada uma das relações caracteristicas

$$b=a+r,\ c=b+r,\ \ldots\ldots\ l=k+r,$$

que definem a progressão, e ajuntar em seguida todos estes desenvolvimentos. Com effeito, designando por S_{m+1}, S_m, S_{m-1} ..... S_2, S_1 a somma dos termos propostos elevados, cada um, á

potencia marcada pelo indice, ter-se-ha assim, depois de ter tirado S_{m+1} commum aos dois membros, uma relação fundamental,

$$l^{m+1} - a^{m+1} - (n-1)r^{m+1} = (m+1)r(S_m - l^m)$$

$$\frac{(m+1)m}{1.2} r^2 \left(S_{m-1} - l^{m-1} \right) + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} r \left(S_{m-2} - l^{m-2} \right) + \ldots$$

entre a somma procurada e todas as sommas analogas relativas as potencias anteriores. Si, pois, se parte de S_1 já conhecida, ou mesmo de S_0 cujo valor é immediato, poder-se-hão formar assim successivamente as expressões de S_2, S_3, etc., até a potencia que se quizer. Na progressão considerada aqui, 1, 2, 3, 4,..... n, esta relação se simplifica e torna-se

$$n^{m+1} - n = (m+1)\left(S_m - n^m\right) + \frac{(m+1)m}{1.2}\left(S_{m-1} - n^{m-1}\right) +$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\left(S_{m-2} - n^{m-2} \right) + \ldots\ldots$$

Posto que este meio pudesse certamente levar a sommar potencias especiaes mesmo muito altas, seria difficil induzir a lei geral propria a um expoente m indeterminado. Mas, reflectindo sobre o destino actual desta sommação, podemos facilmente tomar a unica parte que possa influir sobre a quadratura proposta. Na verdade, quer pela natureza da questão, quer mesmo em virtude da relação precedente, é facil sentir logo que S_m será uma funcção de n do grau $m+1$. Ora, como devemos comparal-a a n^{m+1}, é claro que o unico termo desta formula, que deve realmente affectar o limite procurado, é o do mais alto grau, pois que todas as outras partes da relação annullar-se-hão para $n=\infty$, emquanto n estiver no denominador. Estando assim reduzida a questão algebrica á pesquiza deste termo unico, mostra evidentemente a relação precedente que elle é igual a $\frac{n^{m+1}}{m+1}$, de sorte que o limite da relação

$\frac{S_m}{n^{m+1}}$ será certamente $\frac{1}{m+1}$; d'onde resulta, relativamente á nossa quadratura, a formula $S = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$, conforme o primeiro methodo. (*)

Principio de Wallis

73. — Depois de ter estabelecido por um dos dous methodos precedentes a quadratura das curvas parabolicas, pode a analyse ordinaria deduzir deste caso fundamental muitas outras quadraturas,, com o auxilo do luminoso principio devido a Wallis sobre a reducção dos polynomios a monomios. Este principio evidente consiste em que, si a ordenada da curva proposta se pode decompôr em muitas outras segundo a lei constante

$$y = y' + y'' - y''',$$

ter-se-ha, para as arias correspondentes ás ordenadas parciaes, a mesma relação aria total $S = S' + S'' - S'''$, contanto que todos estes segmentos sejam estimados entre os mesmos limites lateraes de sorte que, quando estas ordenadas auxiliares pertencerem a curvas que já saibamos quadrar, resultará logo, sem nenhum esforço, a quadratura da curva proposta. Com effeito, sendo proporcionaes ás suas alturas os rectangulos da mesma base, concebe-se que esta subordinação existe a principio entre os rectangulos elementares, e por conseguinte entre as sommas respectivas de um numero igual, mas qualquer, destes diversos elementos, e emfim entre os limites correspondentes a estas sommas. Poder-se-hia dizer mais geralmente que, si a relação da curva composta para as curvas simples contivesse tambem coefficientes constantes, como $y = ay' + by'' - cy''$, a mesma dependencia existiria ainda entre as arias convenientes

$$S = a\,S' + bS'' - cS'''.$$

Segundo este importante principio, evidentemente applicavel a um numero qualquer de partes, a quadratura das curvas parabo-

---

(*) Por elementar que seja na realidade tal exposição, os principiantes, a quem ella offerecer algumas difficuldades, poderão utilmente esclarecel-a limitando-se a considerar a principio casos particulares os mais simples, $m=2$, $m=3$, para chegar depois ao caso de expoentes quaesquer.

licas conduz para logo â de todas as curvas em que a ordenada fosse decomposta em uma somma de potencias da abscissa, sem de mais exeeptuar o caso dos expoentes fraccionarios, aos quaes já foi extendida a regra primitiva (71), Attribuindo a este principio toda a sua extensão logica, até applical-o a uma infinidade de termos, poderiamos mesmo deduzir desde já, sob uma certa forma em verdade imperfeitissima, a quadratura de todas as curvas algebricas, ao menos quando a ordenada pode ser desembaraçada. De facto, qualquer que seja a funcção algebrica a que tenha dado logar uma tal resolução, poder-se-ha sempre, quer pela divisão, quer por meio da extracção, segundo seja fraccionaria ou irracional, transformal-a em uma serie indefinida ma s ou menos regular, ordenada segundo as potencias positivas e mesmo inteiras da abscissa, de feição a poder em seguida, segundo o principio de Wallis, deduzir della, partindo da quadratura primordial, uma outra serie relativa á aria procurada. Os meios mais aperfeiçoados que, para esta transformação analytica, fornecem os mais completos connecimentos algebricos, poderão aliás facilitar muito tal operação fazendo melhor colligir-se a lei de cada serie. Em fim, si se considera que as proprias funcções transcendentes são tambem susceptiveis de semelhante desenvolvimento, conceber-se-ha que o uso conveniente do principio de Wallis pode, a este respeito, levar a analyse ordinaria a exprimir em serie a aria uma curva qualquer. Embora seja sem duvida pouco satisfactoria uma tal expressão, é mister acostumarmo-nas desde este momento a considerar este expediente como muita vez indispensavel não só á analyse ordinaria, mas ainda á transcendente que, multiplicando muito os casos em que a lei de quadratura é assignavel em termos finitos, comtudo jamais poderá abordar, sem o auxilio das series, a maior parte das questões deste genero.

O mais feliz uso, que pode comportar esta introducção das series, consiste em não haver mais de um simples intermediario para melhor descobrir a formula finita, quando a serie obtida só apresenta o desenvolvimento de uma funcção já conhecida. Bem que estes casos devam ser muito raros, podemos citar um importante exemplo que vai procurar nova extensão á nossa regra primordial de quadratura, e por conseguinte abrir novos caminhos ao emprego ulterior das series, permittindo a admissão dos expoentes negativos. Seja este exemplo a curva $y=ax^{-m}$, pera a

qual convem modificar um pouco a posição anterior da questão, evitando contar a aria a partir de $x=0$ que então torna y infinito; porisso supporemos que o segmento começa, por exemplo, de $x=1$. Não obstante, afim de não mudar os habitos anteriores, em que as regras algebricas de quadratura se referem sempre a uma aria que parte do eixo dos y, cumpre transportar este eixo á posição correspondente a esta abscissa inicial, o que se reduz a mudar na equação proposta x em $1+x$. Tem-se então $y=a(1+x)^{m}$, e, desenvolvendo segundo a lei do binomio,

$$y=a(1-mx+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3+....).$$

Operando a quadratura segundo o principio de Wallis, acha-se a serie

$$S=a\left(x-\frac{m}{2}x^2+\frac{m(m+1)}{1.2.3}x^3-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3.4}x^4+....\right).$$

Ora, considerando-a com attenção, é facil reconhecer n'ella o desenvolvimento de $(1+x)^{-m+1}$, do qual se tivesse tirado o primeiro termo 1 e em seguida o factor $m+1$. D'ahi resulta, pois, uma expressão finita da aria procurada que, reduzindo-se á antiga origem das abcissas, acha-se em fim representada pela formula

$$S=\frac{a(x^{-m+1}}{-m+1}.$$

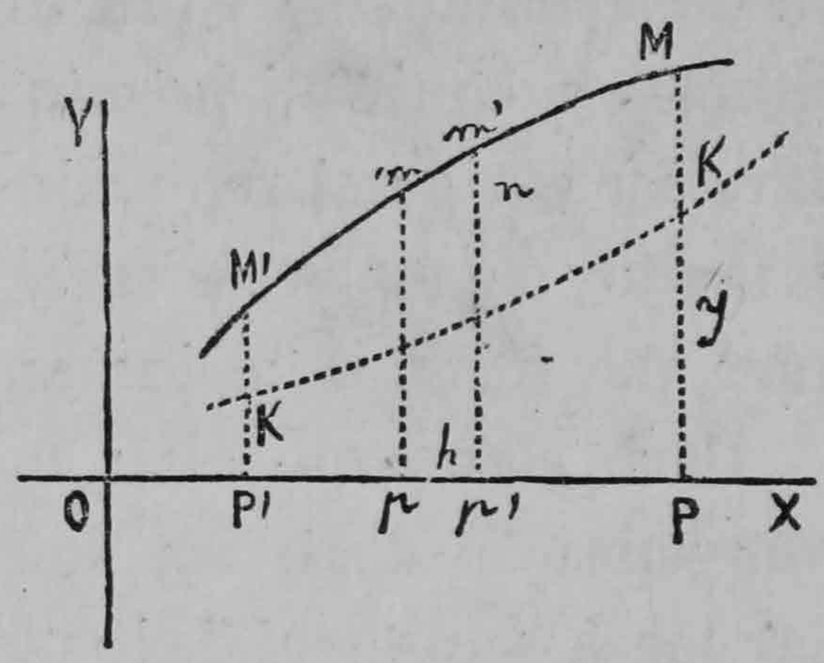
Tendo-se em vista a origem actual das arias, consiste evidentemente este resultado em estender aos expoentes negativos a regra de quadratura, precedentemente demonstrada para a equação $y=ax^{m}$, quando se suppunha m positivo.

74.—Taes são os recursos essenciaes que na realidade apresenta a analyse ordinaria para abordar, a um certo grau, a theoria das quadraturas propriamente ditas, evitando exagerar puerilmente seu alcance effectivo por vã imitação, mais ou menos dissimulada, dos processos verdadeiramente emanados da analyse trans cendente. Cumpre agora explicar successivamente as diversas aproximações fundamentaes que muito estendem a utilidade geometrica de quaesquer meios analyticos relativos á medida das arias, permittindo reduzir tambem a esta questão a medida dos comprimentos e a dos volumes.

século 17

Pelos meiados do penultimo seculo, a manifestação definitiva destas relações necessarias constituiu um dos primeiros resultados naturaes da feliz revolução que Descartes acabava de operar no systema das especulações geometricas, fazendo prevalecer convenientemente as concepções analyticas, que têm permittido uma generalisação até então impossivel. Assim, estas importantes relações vão estabelecer-se aqui com toda a generalidade desejavel, sem de modo algum exigir a analyse transcendente que, fóra de proposito, se julga hoje indispensavel, comquanto a creação desta tenha sido historicamente muito posterior á descoberta daquellas.

Consideremos a principio a rectificação das curvas planas. A marcha geral da solução apresenta-se logo como evidentemente analoga á do problema das quadraturas, pois que a difficuldade consistirá aqui em discernir o limite da somma dos elementos rectilineos, taes como *mm' (fig. 45)*, componentes do polygono inscripto que se substitue ao arco proposto, M'M, comprehendido entre as ordenadas M'P' e MP. Entretanto um exame mais aprofundado mostra facilmente que se pode estabelecer, sob o ponto de vista analytico, uma verdadeira identidade entre as duas pesquizas, reduzindo a rectificação de uma curva qualquer á quadratura de outra, ligada á primeira segundo uma lei constante. Basta para isso procurar a expressão geral do elemento curvilineo por meio do elemento *pp'* ou *mn* da abscissa. Chamando α a angulo *m' mn* que no limite torna-se evidentemente a inclinação da tangente em *m* sobre o eixo, ter-se-ha $mm' = h \sec \alpha$. Ora esta formula permitte encarar o elemento linear proposto como numericamente equivalente ao elemento superficial de uma certa curva auxiliar KK' cuja ordenada fosse representada pela funcção que, para a curva dada, indica a secante da inclinação da tangente, de sorte que poder-se-ha deduzir sua equação, segundo a regra das tangentes, da da curva proposta de accordo com a lei $y = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$, si $y = f(x)$ é a equação primitiva. Tal assimillação elementar determina a mesma relação entre as sommas de igual numero de elementos respectivos, e por conseguinte entre os limtes destas sommas. Assim, o arco procu-



(*Fig. 45*)

rado M'M equivalerá numeri amente ao segmento K'P'KP. Portanto, si a quadratura da curva auxiliar é accessivel aos methodos conhecidos, fornecerá para logo a rectificação da curva proposta.

Trate-se, por exemplo, de rectificar o circulo $y^2+x^2=r^2$. Ter-se-ha tang $\alpha = -\frac{x}{y}$, e desde então a curva auxiliar segundo a lei precedente $z=\sec\alpha$, terá para equação $z=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Não sendo os nossos methodos actualmente aptos para quadrar esta curva do quarto grau, si não está em serie, a questão só comporta agora uma semelhante solução.

A extrema imperfeição, em que tivemos de deixar acima a theoria das quadraturas propriamente ditas, raramente nos permittiria effectuar assim as rectificações, em vista da enorme complicação que a natareza desta lei de transformação deverá introduzir de commum na equação da curva auxiliar, embora seja muito simples a equação primitiva. Mas o problema das rectificações deve ser em geral reputado mais difficil do que o das quadraturas, e muito menos vezes susceptivel de solução satisfactoria, quaesquer que sejam os meios analyticos com que possamos abordal-o.

Devo entretanto citar um exemplo notavel em que, por uma compensação analytica eminentemente excepcional, a curva auxiliar torna-se na realidade mais simples que a proposta: o da curva $y^2=x^2$. Acha-se aqui, para a curva auxiliar, a equação

$$z^2=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

que, posta sob a forma

$$z=\frac{9}{4}\left(x+\frac{4}{9}\right),$$

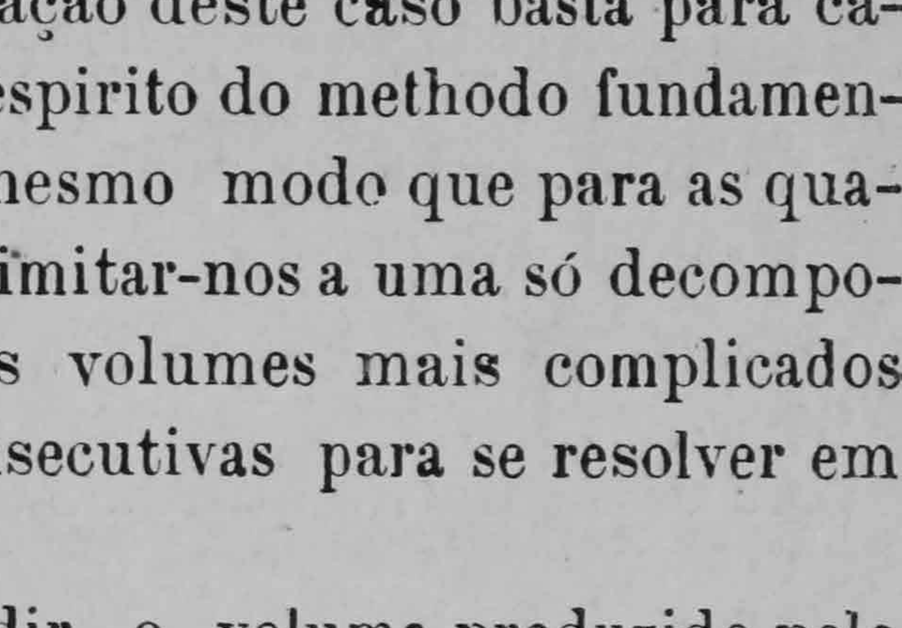
ndica evidentemente uma parabola que com facilidade se quadra pela regra elementar (71) assignando ao segmento os $\frac{2}{3}$ da aria do rectangulo das coordenadas extremas. Só deve-se notar, a este respeito, que aparabola actual tem o vertice a $\frac{4}{9}$ para traz do eixo dos y, a partir do qual esta regra avalia a aria, e d'onde queremo

tambem contar o arco procurado. Cumpre, pois, da expressão habitual do segmento variavel tirar agora a do segmento fixo que se extende de tal vertice ao dito eixo, o que afinal dará, para a rectificação proposta, a formula

$$s=\left(x+\frac{4}{9}\right)\sqrt{x+\frac{4}{9}}-\frac{8}{27}.$$

75.—Passando agora á medida dos volumes aqui, para não sahir realmente da geometria plana, considerar sómente os corpos gerados pela revolução de uma curva plana em torno de um eixo situado no seu plano. Depois dos corpos cylindricos e conicos, cuja medida resulta immediatamente da dos prismas e das pyramides, estes corpos redondos constituem o caso mais simples e tambem o mais usual. Demais, a justa apreciação deste caso basta para caracterisar claramente o verdadeiro espirito do methodo fundamental das cubaturas, comquanto, do mesmo modo que para as quadraturas e rectificações, possamos limitar-nos a uma só decomposição elementar, ao passo que os volumes mais complicados exigiriam duas decomposições consecutivas para se resolver em elementos directamente avaliaveis.

Proponhamo-nos, portanto, medir o volume produzido pelo segmento curvilineo qualquer M'MPP' (*fig. 46*) girando em torno do eixo dos x. Os elementos naturaes deste corpo seriam desde logo os troncos de cone resultantes dos trapezios elementares cuja aria geratriz é immediatamente formada. Mas, assim como a cada um destes trapezios, $mm'p'p$, se pode substituir o rectangulo correspondente $mnp'p$, egualmente autorisa um motivo semelhante a substituir estes elemen-



(*Fig. 46*)

los conicos pelos simples cylindros gerados por esses rectangulos; porisso que cada tronco de cone está evidentemente comprehendido entre dous cylindros, um exterior, outro interior, os quaes no limite coincidem exactamente, como os rectangulos geradores $m'qpp'$ e $mnp'p$. A' vista disto, o elemento do volume procurado

terá para medida $\pi y^2 h$. Ora, omittindo o factor constante π, pode esta expressão ser attribuida ao elemento superficial de uma curva auxiliar G'G cuja ordenada correspondesse ao quadrado da funcção da abscissa, que representa a ordenada da curva dada. Assim, raciocinando como no numero precedente, reconhecer-se-ha sem difficuldade alguma que a quadratura desta nova curva, entre os limites propostos, representará numericamente a cubatura pedida, desde que se tenha multiplicado o resultado final pela conhecida relação entre a circumferencia e o diametro. A lei $z = y^2$, segundo a qual a curva auxiliar deriva da curva dada, mostra claramente que esta segunda extensão fundamental da theoria das quadraturas é mais favoravel do que a precedente, pois que a quadratura final deve ser então muito mais vezes accessivel aos nossos methodos actuaes, attento a simplicidade comparativa da nova equação.

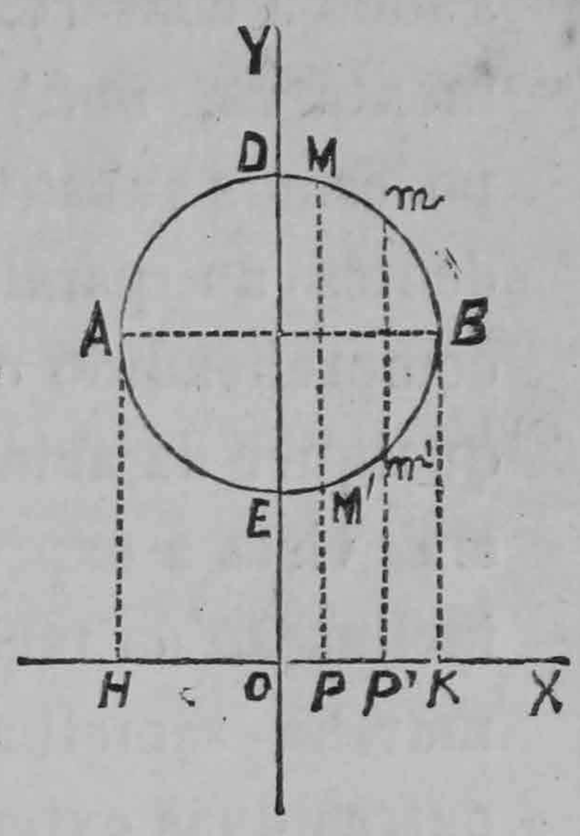
Supponhamos, por exemplo, que se trate de assim obter a medida do segmento espherico, partindo da equação $y^2 + x^2 = r^2$ do circulo gerador. Neste caso, a curva auxiliar é uma simples parabola, $z = r^2 - x^2$, que se póde quadrar facilmente segundo a regra elementar, e que dá $S = r^2 x - \frac{x^3}{3}$, d'onde resulta para o volume procurado a formula $V = \pi\left(r^2 x \frac{x^3}{3} \right)$, em que o segmento é naturalmente contado do centro, e que com facilidade conduziria á expressão do segmento contado da superficie. De resto, obter-se-hia este directamente representando-se o circulo gerador pela equação $y^2 = 2rx - x^2$, d'onde, sem mais embaraço, deduziria o mesmo methodo a formula $V = \pi x^2 \left(r - \frac{1}{3} x \right)$. Na hypothese $x = r$, cada uma destas formulas determinaria o hemispherio, de modo a reproduzir espontaneamente, para a esphera total, a expressão elementar $\frac{4}{3} \pi r^3$ cuja demonstração poderia ser logicamente adiada até chegar o principiante ao grau actual da iniciação mathematica, bem que aliás convenha, a todos os respeitos, manter o uso de fazer conhecer muito mais cedo um tal resultado geometrico.

Consideremos ainda o caso do toro, gerado por um circulo ABDE (*fig. 47*) que, tendo o centro C sobre o eixo dos y, gira ao

redor do eixo dos x. A equação do circulo é então $(y-b)^2+x^2=r^2$, e d'ella resulta, para a curva auxiliar, a equação

$$z=b^2+r^2-x^2\pm 2b\sqrt{r^2-x^2},$$

em que o duplo signal corresponde á duplicidade actual das ordenadas MP e M'P relativas á mesma abscissa. Importa sentir aqui que, si se applicasse cegamente a regra ordinaria a uma ou á outra destas duas funcções, não se obteria, estendendo o resultado aos limites horizontaes do corpo proposto, a verdadeira medida do toro, mas somente ou a do corpo produzido pelo espaço circular concavo HADBK, segundo a primeira, ou a do formado pela aria convexa HAEBK. Para que o leitor comprehenda bem este facto, basta um instante de reflexão directa sobre a origem da relação fundamental. Ora, sendo o toro evidentemente equivalente á differença destes dous volumes, vê-se que é preciso agora quadrar em separado as duas curvas auxiliares, e depois subtrahir o segundo resultado do primeiro. Nesta subtracção os termos communs, que aliás se quadrariam com facilidade, devem desapparecer, de sorte que fôra superfluo effectuar a quadratura delles; ao contrario, os dous termos distinctos serão sommados, attento a opposição dos signaes, e afinal tudo se reduzirá, segundo o principio de Wallis, a quadrar a curva $z=\sqrt{r^2-x^2}$, multiplicando-se depois o resultado por $4b$ e, em ultimo lugar, pelo factor habitual π. A não ser em serie, não poderiamos agora operar esta quadratura definitiva, que é evidentemente a do circulo gerador, si tratassemos de um segmento torico qualquer. Para o toro inteiro, porém, o resultado é já conhecido em virtude da regra elementar relativa á aria do circulo, regra que deve ser aqui applicada ao semi-circulo. Achar-se-ha assim a formula final $V=2\pi^2br^2$, perfeitamente conforme com a lei geral de Guldin sobre a medida de todo corpo redondo, dada pelo producto da aria geratriz multiplicada pela circumferencia descripta pelo seu centro de gravidade.



(Fig. 47)

Um tal exemplo merecia aqui uma apreciação especial, como proprio a caracterisar a maneira porque é mister modificar o me-

thodo fundamental toda vez que a figura proposta, em vez de estender-se para baixo até o eixo,conforme nossa hypothese ordinaria, fôr circumscripta entre duas partes de uma mesma curva, ou aliás entre duas curvas distinctas cujas ordenadas deferissem entre si de um modo analytico qualquer, em logar de só se distinguirem pelos signaes de um radical.

76.—Procedamos,emfim, á ultima extensão geral de nossa theoria das quadraturas, applicando-a em medir a superficie curva que limita os corpos redondos que acabamos de cubar. Somos aqui obrigados a conservar os elementos conicos gerados pelos lados elementares, *mm'* (*fig. 46*), da curva dada, sem de modo algum podermos substituir-lhes os elementos cylindricos corrrespondendentes ás parallelas, *m'n* ou *m'q*, entre as quaes não está mais comprehendido o elemento natural. Por conseguinte um elemento qualquer da aria procurada será medido por $2\pi hy\sec\alpha$, tendo-se em vista a expressão (74) do lado *mm'*, e sempre designando α a inclinação da tangente sobre o eixo. Segundo tal formula, uma marcha semelhante á que já foi empregada, quando tratamos das outras duas extensões fundamentaes, conduz facilmente a reconhecer que a quadratura da superficie curva dada se reduz á da aria plana correspondente a uma curva auxiliar, cuja equação se deduziria da da curva proposta segundo a lei $z=y\sec\alpha$; apenas é preciso multiplicar esta aria pelo factor constante 2π.

A lei de transformação geral é aqui mais complicada do que em qualquer outro caso, porisso esta terceira classe de investigações deve emfim ser encarada como a menos accessivel aos nossos methodos actuaes, e mesmo aos meios mais perfeitos que a analyse transcendente fornece. Não posso tão pouco citar outro caso interessante a que ella se torne completamente applicavel, a não ser o da esphera, em que, por uma compensação eminentemente excepcional, os radicaes proprios aos dous factores y e $\sec\alpha$, em vez de combinar-se como de costume, destroem-se mutuamente; de sorte que, contra o uso normal, a linha auxiliar é então mais simples do que a linha dada. Partindo da equação $y^2=2rx-x^2$, afim de obter a zona de uma só base, acha-se $\alpha=\frac{r}{y}$, de modo que a linha auxiliar é $z=r$, isto é,uma simples parallela ao eixo, d'onde resulta, segundo as nossas regras, a formula $S=2\pi rx$, perfeitamente conforme com a lei conhecida.

No caso do toro (*fig. 47*), achar-se-hia com facilidade, segundo a mesma equação do numero precedente, a curva auxliar

$$z = \frac{br}{\sqrt{r^2 - x^2}} \pm r.$$

Estendendo a sua quadratura até os limites horizontaes do toro inteiro, corresponderia o signal superior â aria resultante da semi-circumferencia concava ADB, e o inferior á que fosse gerada pela semi-circumferencia convexa AEB. A aria buscada dependerá, pois, da somma das duas quadraturas, na qual não poderia influir o termo distincto $\pm r$, de sorte que tudo se reduz a dobrar o resultado correspondente á equação

$$z = \frac{br}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Ora, bem que escape directamente aos nossos methodos elementares, salvo o recurso das series, é facil sentir que, omittindo o factor b, esta quadratura coincide com a exigida (74) para a rectificação do circulo, a qual já nos é conhecida para a circumferencia total que se refere aqui ao toro todo. Com esta util approximação, acha-se facilmente a formula final $S = 4\pi^2 br$, conforme a segunda parte da lei de Guldin sobre a quadratura dos corpos redondos, dada pelo producto do contorno gerador pela circumferencia descripta pelo seu centro de gravidade. Convem não deixar sem reparo, a respeito de tal solução, este exemplo evidente da efficacia natural, e mesmo especial, do ponto de vista analytico para o aperfeiçoamento das diversas noções geometricas, com o auxilio das novas ligações abstractas que estabelece entre ellas, ligações que ás vezes permittem fazer com que entrem umas nas outras, questões que a principio deviam parecer heterogeneas.

TERCEIRA PARTE

DISCUSSÃO GEOMETRICA DAS EQUAÇÕES *ALGEBRICAS* A DUAS VARIAVEIS

CAPITULO I

CONSIDERAÇÕES GERAES

77.— Em consequencia do modo porque se tem até aqui limitado a concepção desta parte essencial da geometria plana, constitue ella apenas a applicação geral do conjuncto dos methodos, que acabamos de estabelecer, á determinação caracteristica da verdadeira figura de uma curva segundo a sua equação. Sem exigir propriamente nenhum principio novo, esta parte só se distinguirá da precedente pela combinação espontanea e continua das diversas theorias que foram acima consideradas em separado, e que é preciso agora fazer com que concorram á apreciação progressiva das fórmas correspondentes ás differentes equações, ensinando sobretudo aperfeiçoar estas indicações distinctas umas pelas outras, as quaes poderão ás vezes supprir-se mutuamente. E' no sentimento familiar de tal solidariedade geral que consiste a principal utilidade deste novo estudo, de commum imperfeitissimo, em falta do qual, não se poderia, no entanto, obter manifestação sufficiente do verdadeiro espirito da geometria analytica.

Para desde logo caracterisar convenientemente a marcha fundamental que se deve sempre seguir na discussão geometrica das equações, importa distinguir dous graus essenciaes necessariamente consecutivos, um relativo á ordenada, o outro á tangente. Base indispensavel do conjuncto da discussão, consiste sobretudo o primeiro grau, não em examinar minuciosamente alguns pontos

particulares, como tem-se o costume de fazer quasi ao acaso, mas em perceber com clareza o modo geral da variação da ordenada segundo a abscissa. Esta apreciação compõe-se essencialmente de duas partes successivas: na primeira determinam-se os intervallos entre os quaes será real a ordenada, para discutir-se na segunda o sentido da variação de sua grandeza e o signal com que se opera esta variação para cada intervallo de realidade, abandonando-se aquelles em que ella se torne imaginaria. Assim, connece-se, em primeiro logar, si a curva é limitada ou não, continua ou descontinua; em segundo logar, si é ascendente ou descendente, si corta ou não não os eixos coordenados. Além disso, cada uma destas duas partes da discussão fundamental da ordenada dá logar o mais das vezes a um complemento natural que consiste em determinar o maior numero possivel dos pontos particulares em que se operam estas differentes passagens da realidade á imaginariedade, da ascenção á descensão, de um lado do eixo ao outro. Convém então resumir o conjuncto desta primeira apreciação pela mais simples figura que possa satisfazer convenientemente ás diversas indicações acima obtidas, seguindo-se o importante preceito logico, mencionado na primeira parte deste tratado, sobre a necessidade de introduzir o mais promptamente possivel uma hypothese propria a ligar todos os documentos já recolhidos, a qual poderá ser modificada em vista de novas informações.

Embora algumas vezes possa esta discussão da ordenada bastar para caracterisar claramente a verdadeira figura geral de uma curva, contudo deixará ella quasi sempre, sobre o sentido effectivo da curvatura, uma incerteza radical que só poderá ser dissipada por um segundo grau de discussão, relativo ao modo de variação da tangente nas diversas partes da linha. O methodo natural que já empregamos para decidir si uma curva é concava ou convexa para um eixo, comparando a sua ordenada com a d'uma corda convenientemente escolhida, conduziria o mais das vezes a calculos muito e muito complicados. Ora, esta comparação espontanea entre duas funcções distinctas póde ser agora substituida por uma comparação equivalente, não menos geral porém muito mais facil, entre os valores succes ivos de uma mesma funcção—a que exprime em cada ponto o coefficiente angular da tangente correspondente. De facto, suppondo, para melhor fixar as idéas, que a ordenada cresça com a abscissa, é claro que, si a curva é concava

para o eixo, diminuirá sempre a inclinação da tangente, aliás com limite ou não, em quanto a curva se elevar, ao passo que, si é convexa, este angulo, ao contrario, irá augmentando. Quando, porém, a curva desce, o symptoma é inverso, mais igualmente decisivo : o angulo então obtuso, que a tangente fórma com o eixo aproxima-se ou afasta-se do angulo recto á medida que a abscissa augmenta, conforme seja a curva concava ou convexa. Assim, o o modo geral de variação do coefficiente angular da tangente é sempre proprio a determinar o verdadeiro sentido da curvatura, sem que, a este respeito, convenha reter d'ante-mão nenhuma formula especial, que não poderia igualmente adaptar-se ás diversas applicações.

Este segundo grau geral da discussão geometrica das aquações indica a principio certos pontos notaveis que completam naturalmente a discussão da ordenada, fazendo conhecer os *maxima* ou *minima* das duas variaveis simultaneas, segundo as tangentes parallelas aos eixos, como tenho explicado em principio expondo a applicação da theoria das tangentes a esta importante investigação analytica. Mas, alem destes pontos que propriamente pertencem ao primeiro grau de discussão, a marcha das tangentes introduzirá espontaneamente a determinação de uma outra especie de pontos que se lhe referem especialmente,—aquelles em que a curva muda de sentido. Quando uma curva é sinuosa, cada uma das suas *inflexões* acha-se, com effeito, caracterisada, segundo a explicação precedente, por um estado *maximum* ou *minimum* da funcção que mede a inclinação da tangente sobre o eixo ; pois que é então que esta funcção passa do crescimento ao decrescimento, ou em sentido inverso, segundo a posição da figura. E', pois, possivel descobrir estes pontos de inflexão applicando ao coefficiente angular da tangente os methodos que se julguem convenientes para determinar os *maxima* ou *minima*. Acompanhando os principios que sobre este assumpto temos estabelecido, poder-se-hia considerar o caracter analytico destes pontos como consistindo, em geral, na annullação da segunda derivada da funcção relativa á ordenada, sob a reserva habitual das excepções proprias o esta theoria. Mas, quer possamos immediatamente applicar um tal caracter, quer, como o mais das vezes acontecerá, sejamos obrigados a seguir a este respeito os circuitos algebricos acima ex-

plicados, impostos pela fraca instrucção analytica exigida neste tratado, será sempre de accordo com semelhante consideração geometri a que aqui procederemos á pesquiza destes pontos notaveis.

A estes dous graus essenciaes da discussão geometrica, a unica accessivel á analytise ordinaria, ajuntará ulteriormente a trascendente um terceiro, destinado a completar o segundo, como este já terá completado o primeiro, apreciando o modo geral de variação da curvatura considerada, não mais na sua direcção concava ou convexa somente, mas tambem na sua maior ou menor intensidade. Não poderemos instituir aqui, a este respeito, mais que um primeiro esboço necessariamente vago e imperfeito, examinando as mudanças mais ou menos rapidas que experimenta a inclinação da tangente. Toda vez que este angulo variar muito n'um pequeno intervallo, julgaremos a curvatura em geral mui pronunciada; pelo contrario, quando for pequena a sua variação entre duas sinuosidades muito afastadas, concluiremos que a curvatura é fraca. Mas estas insufficientes indicações as unicas, que, sobre este assumpto, fornece a analyse ordinaria, de modo nenhum poderiam de mais permittir-nos medir estas desigualdades de curvaturas, nem distinguir o que se refere aos diversos pontos de cada ramo. E' só sob este aspecto que deverão nossas figuras ficar ordinariamente indecisas, até que a analyse transcendente tenha posto o leitor em estado de abordar tal apreciação, na qual é ella essencialmente indispensavel.

As diversas indicações geometricas, relativas ás nossas differentes theorias geraes, virão demais grupar-se espontaneamente, segundo a natureza de cada uma, em torno de um ou de outro déstes dous graus necessarios, que acabamos de distinguir na discussão das equações. Prender-se-ha naturalmente á discussão fundamental da ordenada, desde que haja logar, a consideração dos diametros, assim como a dos centros. Do mesmo modo, a discussão complementar da tangente conduzirá habitualmente á determinação das asymptotas, caso não as tenha indicado directamente o exame da ordenada.

Seguindo estas explicações geraes sobre a marcha necessaria da sã discussão geometrica das equações, deve esta terceira parte essencial do nosso estudo consistir com especialialidade em uma serie de exemplos convenientemente escolhidos, proprios a bem

caracterisar a applicação familiar destes principios incontestaveis que, como todos os preceitos logicos, não obstante a sua evidencia immediata, não poderiam ser sufficientemente apreciados sinão por um exercicio judicioso. Todavia, afim de evitar inuteis desenvolvimentos, limitar-me-hei aqui aos exemplos susceptiveis de fazer sobresahirem claramente as diversas difficuldades de tal trabalho, aliás ordenando-as de maneira a permittirem facilmente a formação de novos casos, cujo exame espontaneo deixarei ao leitor. Nada é mais proprio do que semelhantes exercicios, quando bem concebidos e dirigidos, não só para fazer sentir profundamente o verdadeiro genio da geometria analytica, mas tambem para realisar directamente esta preparação logica universal que constitue, no fundo, a principal utilidade final da iniciação mathematica. Em verdade, uma tal elaboração tende especialmente ao desenvolvimento rudimentar do espirito do conjuncto, até hoje muito raro entre os geometras, habituando a fazer exactamente convergirem todas as diversas determinações analyticas a um mesmo resultado synthetico, a principio entrevisto confusamente e em seguida gradualmente esboçado, á medida que se accumulam as indicações, jamais complicando a hypothese primitiva sinão quanto o exige a necessidade de satisfazer a todas as informações colhidas.

78.— Para dirigir a escolha racional dos exemplos successivos que devem caracterisar aqui a discussão geometrica das equações algebricas, seria necessario estabelecer principios geraes sobre a classificação natural das curvas correspondentes. Ora, é neste ponto que se manifesta aos espiritos convenientemente preparados a extrema imperfeição actual da terce ra parte essencial da geometria analytica que, sob esta relação, não sahiu ainda da infancia ; a tal ponto que a maior parte dos geometras. mesmo eminentes, nem ao menos têm comprehendido até o presente quaes são, a este respeito, as verdadeiras necessidades da sciencia, por falta de uma disposição philosophica que não póde ser neste assumpto bastante desenvolvida, sinão sob inspirações logicas emanadas das mais altas partes do estudo dos corpos vivos, unica fonte espontanea dos verdadeiros principios relativos á theoria universal de quaesquer classificações.

Desde a origem da geometria plana, os habitos algebricos têm involuntariamente levado a classificar as curvas planas pelos

graus de suas equações rectilineas, sem que jamais se tenha examinado directamente si esta classificação empirica póde de algum modo satisfazer ás condições essenciaes que a razão impõe em uma tal operação. Não obstante, é evidente, em principio, que os motivos, que em algebra têm inspirado e mantido essa classificação, não poderiam de nenhuma sorte bastar para transportal-a á geometria. Com effeito, elles se referem essencialmente á difficuldade crescente que, á medida que o gráu se eleva, deve necessariamente offerecer a resolução das equações, objecto final das especulações algebricas. Ora, esta distincção não comporta, por sua natureza nenhuma importancia geometrica, pois que, como já reconhecemos no começo deste tratado, o logar de uma equação é radicalmente independente da sua forma actual; ao passo que em geometria habitualmente se concebe a equação como resolvida, e não se faz preciso inquirir de modo algum do embaraço puramente analytico que a realisação de tal projecto possa suscitar. Por si mesmo, o gráu de uma equação não tem outra influencia geometrica além da de indicar um limite superior do numero de pontos em linha recta admittidos pela curva correspondente. Mas, esta consideração, que poderia adquirir verdadeira importancia por designar o numero de sinuosidades, si tal indicação fosse mais precisa, não póde tornar-se um principio de classificação, attenta sua radical incerteza. Ha, por exemplo, em todos os gráus pares curvas que, como as secções comicas, não poderiam ser cortadas por uma recta em mais de dous pontos.

Esta insufficiencia necessaria da classificação empirica, adoptada espontaneamente pelos geometras para as curvas algebricas, é facilmente verificavel em muitos casos decisivos, com quanto o ostudo comparativo destas diversas figuras não esteja ainda convenientemente estabelecido, nem mesmo concebido judiciosamente no seu conjuncto. Podemos, com effeito, certificar-nos muitas vezes que tal classificação rompe directamente todas as analogias essenciaes, e que tambem conduz a aproximações viciosas. Em todos os gráus, mesmo no segundo, as verdadeiras analogias geometricas de cada curva acham-se frequentes vezes entre linhas de muitos outros gráus, ao passo que as de gráu correspondente, pelo contrario, dellas differem essencialmente:—dupla confirmação, espontaneamente desenvolvida em toda esta terceira parte, da inanimidade radical de tal classificação. A despeito do

habito inveterado, transmittido sob novas formas dos antigos aos modernos, o qual aproxima essencialmente a ellipse, ora da parabola, ora, da hyperbole, vamos especialmente reconhecer no capitulo seguinte que, si consideramos o conjuncto das relações, sem nos preocupar nenhuma aproximação exclusiva, as verdadeiras affinidades geometricas da parabola ou da hyperbole são sobretudo para com certas curvas, dispersas por entre todos os gráus algebricos, muito mais do que para com as do segundo.

Quanto mais meditarmos sobre este grande assumpto de philosophia geometrica, até hoje apenas entrevisto, tanto melhor sentiremos que a classificação das curvas planas pelos gráus de suas equações não é mais racional, no fundo, do que uma classificação zoologica fundada sobre a côr ou sobre o talhe, etc., independentemente de qualquer profunda comparação organica.

Desgraçadamente, o estado presente da geometria não permitte ainda substituir essa vã classificação empirica por uma concepção verdadeiramente racional. Desde Descartes e sob sua inspiração fundamental, os geometras têm devido occupar-se exclusivamente em construir a geometria geral propriamente dita estabelecendo methodos analyticos, elementares ou transcendentes, proprios ás differentes investigações a que póde dar logar toda figura geometrica. Quanto ao que se deve chamar *geometria comparada*, que só póde resultar de uma applicação comparativa do conjuncto destes methodos ás diversas formas possiveis, nem ao menos é suspeitada a sua existencia. Demais, não poderá mesmo ser concebida sinão quando mais forte educação philosophica tiver sufficientemente infundido nos geometras o sentimento, até agora desenvolvido só pelos naturalistas, do verdadeiro espirito da theoria logica de classificações quaesquer, como estabeleci em diversos logares do meu *Systema de philosophia positiva*. Eu explicarei com todo o cuidado, na ultima parte deste tratado, como a grande concepção de Monge sobre as familias de superficies tem começado espontaneamente a esboçar a constituição directa da geometria comparada. Mas, este germem fundamental, aliás tão mal apreciado até hoje, cuja importancia só Lagrange presentiu dignamente, só convem na realidade ás superficeis e não poderia fornecer nenhuma indicação relativa ás curvas. Assim, sob este aspecto capital, nada mais posso fazer aqui do que apontar, na actual geometria, uma immensa lacuna geral habitualmente despercebida.

Portanto, ainda falta-nos de todo a ordem fundamental de concepções geometricas, que é naturalmente propria a esta terceira parte essencial do nosso estudo, e que poderia procurar-lhe ao mesmo tempo tanto interesse philosophico e tanta extensão sientifica.

Em tal situação, a evidente impossibilidade de adoptar aqui a classificação empirica das curvas algebricas pelos graus de suas equações rectilineas, impõe-nos a inevitavel obrigação de recorrer a um expediente provisorio, para coordenar nossos diversos exemplos de discussão geometrica segundo um principio analytico que, sem na realidade ser sufficiente, possa todavia, quando judiciosamente empregado, guiar-nos melhor do que essa vã consideração primitiva. Julguei dever adoptar, para este effeito, a distincção fundada no numero de termos proprios ás equações algebricas. Discutiremos, pois, primeiro as equações binomias, em seguida as trinomias, e emfim, sob a designação de equações polynomias, todas as que contêm mais de tres termos, qualquer que seja aliás o numero d'elles, que d'ahi em diante não tem mais, em geral, nenhuma alta importancia geometrica. Mas utilisando uma tal distincção, jamais deverá o leitor esquecer que ella repousa em um principio radicalmente insufficiente, que de modo nenhum pode dispensar a elaboração ulterior de um assumpto tão difficil quanto importante, cujo destino caracteristico eu quizera sobretudo assim recordar. Esta classificação provisoria só será verdadeiramente satisfactoria para nossa primeira ordem, em que, com effeito vamos reconhecer os unicos exemplos, bem verificados até hoje, da existencia das familias plenamente naturaes entre as curvas planas.

CAPITULO II

CURVAS BINOMIAS

79.—Comprehende necessariamente esta primeira classe duas sortes de equações: umas, da forma $y^m = ax^n$, compostas de um termo em y e outro em x; outras, da forma $y^m x^{-} = a$, contendo um termo em y e x e outro constante. Bem que possa o segundo typo entrar algebricamente no primeiro, si suppõe-se negativo um dos expoentes, a distincção, sob qualquer forma analytica que se conceba, não é menos indispensavel sob o ponto de vista geometrico. Dahi resultam duas familias de curvas essencialmente differentes, que de commum se designam sob as denominações de *parabolas* e *hyperboles*, tiradas dos gæneros mais simples e mais conhecidos.

Estudemos antes a primeira familia, em que a curva è gerada por um ponto cujas distancias a dous eixos rectangulares variam de tal maneira que duas de suas potencias sejam constantemente proporcionaes. De todas as definições de curvas, è de certo esta a menos differente da definição analytica da linha recta, que nella se acharia comprehendida em caso de igualdade entre os dous expoentes. Tambem, considerando o conjuncto dos aspectos geometricos, poder-se-ha reconhecer que este grupo de curvas planas è, no fundo, o mais simples e o mais bem conhecido. Para aprecial-o convenientemente, è mister distinguir dous casos essenciaes, segundo os expoentes sejam ambos impares ou um impar e o outro par, excluindo-se aquelle em que possam ser pares ao mesmo tempos, pois que não pode dar-se.

No primeiro, representado pelo typo

$$y^{2m+1} = ax^{2n+1},$$

d'onde

$$y = \sqrt[2m+1]{ax^{2n+1}},$$

a discussão fundamental da ordenada mostra logo que a curva é sempre illimitada em todos os sentidos e continua, porisso que

as raizes impares jamais são susceptiveis de imaginariedade. Ao mesmo tempo, comportando estas raizes sò um valor real do mesmo signal que a potencia correspondente, a curva compôr-se-ha de dous ramos oppostos, situados nas duas regiões impares do plano ou nas duas regiões pares, conforme seja o parametro *a* positivo ou negativo. Estas duas partes serão, de resto, perfeitamente identicas, pois que a mudança simultanea do signal das duas coordenadas de modo nenhum altera a equação, de sorte que a curva terá para centro a origem que alem disto será um ponto de inflexão. A linguagem geometrica carece de um termo para qualificar esta identidade entre os dous ramos oppostos, que comcidiriam si se dobrasse a figura duas vezes, cada uma por um dos eixos, ao passo que a palavra *symetria* está desde muito tempo consagrada a designar a identidade entre dous ramos adjacentes, susceptiveis de coincidencia por meio de uma sò dobradura. Emfim, cada uma destas duas metades da curva afastar-se-ha continuamente dos eixos ao mesmo tempo, embora com rapidez desigual, segundo a grandeza relativa dos dous expoentes. Mas, conforme as reflxões geraes do capitulo precedente, vê-se que esta primeira discussão deixa inteiramente indeciso o sentido da curvatura n'um ou n'outro ramo, que poderia indifferentemente ser corcavo ou convexo para o eixo dos x, ou mesmo muito sinuoso, sem cessar de satisfazer ao conjuncto dos documentos assim directamente emanados da ordenada. Esta incerteza só pode ser dissipada por meio do exame da tangente. Applicando a regra ordinaria, acha-se aqui

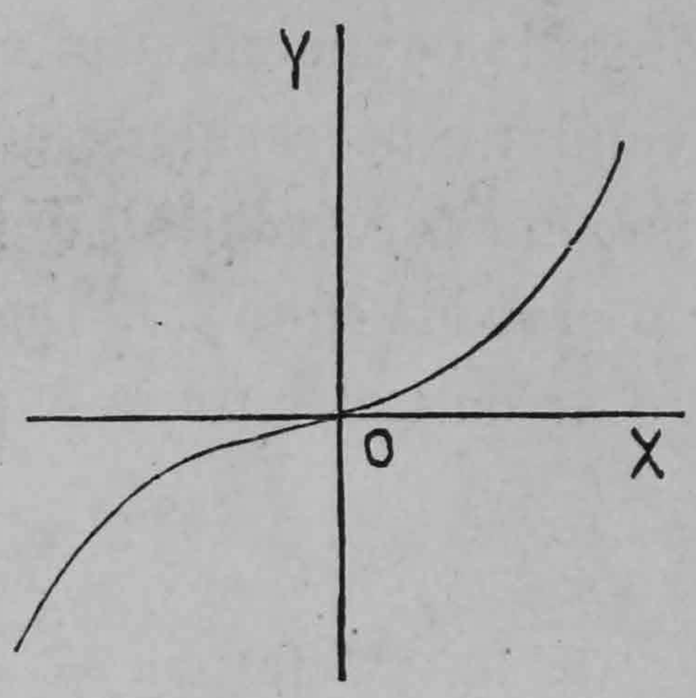
$$\text{tang } \alpha = \frac{(2n+1)ax^{2n}}{(2m+1)y^{2m}};$$

mas, como x e y variam no mesmo sentido, não se pode julgar da marcha de uma tal função sem referir tudo á variavel independente, o que dà

$$\text{tang } \alpha = \frac{2n+1}{2m+1} a^{\frac{1}{2m+1}} x^{\frac{2(n-m)}{2m+1}}.$$

Evidentemente esta funcção será sempre crescente ou sempre decrescente, segundo n for superior ou inferior a m. Assim, a curva è constantemente convexa para o eixo correspondente ao

mais alto expoente, eixo que constitue a sua primeira tangente, e nunca tem outra sinuosidade alem da que é relativa ao seu centro, conforme a figura 48, na qual se tem supposto $n > m$. Sendo assim nullo ou infinito o valor de tang α, concebe-se demais que esta curva não poderia ter asymptota rectilinea, porque, desde então, só poderia admittil-as como parallelas a um dos dous eixos, o que não pode conformar-se com a sua extensão indefinida ao longo de cada um delles. Uma tal curva, qualquer que seja o seu grau, jamais poderá ser cortada sinão em um ou em trez pontos por nenhuma outra recta alem das tangentes, que terão com ella dous pontos com muns, um de contacto e outro de intersecção. Os valores dos dous expoentes m e n evidentemente só poderiam exercer uma influencia secundaria sobre a sua forma geral, de sorte que todas as curvas assim obtidas, com todos os expoentes possiveis, constituirão de certo um mesmo *genero* plenamente natural. Entretanto não poderemos concebel-as como da mesma *especie*, si, como o exige a razão, se define a especie, em geometria comparada, pela semelhança rigorosa das figuras correspondentes. Não haverá, pois, uma verdadeira identidade de especie entre duas curvas deste genero, a não ser quando os dous expoentes apresentarem os mesmos valores quaesquer, sem outra diversidade alem da do parametro a.



(*Fig 48*)

Consideremos agora o caso em que um dos expoentes é par e o outro impar, segundo o typo

$$y^{2m} = ax^{2n+1},$$

d'onde

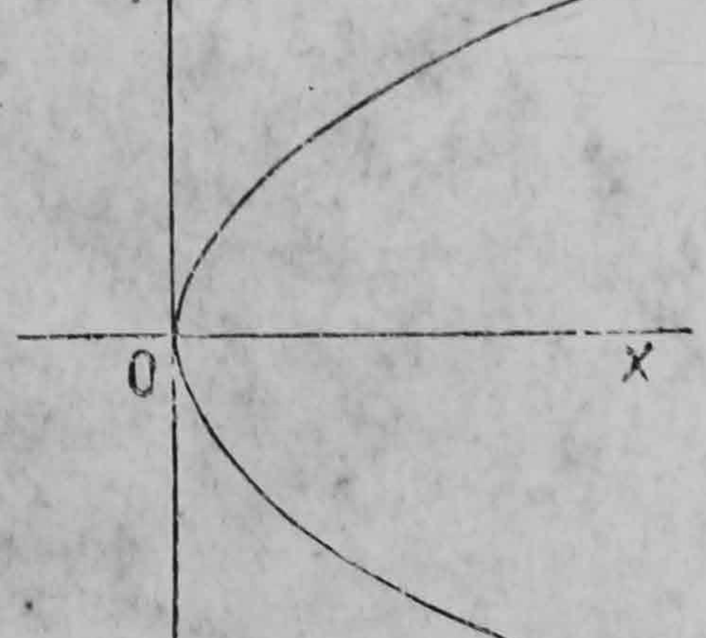
$$y = \pm\sqrt[2m]{ax^{2n+1}}.$$

Então a ordenada torna-se susceptivel de imaginariedade, e só pode ser real quando x tem o mesmo signal que a; assim, a curva é limitada n'um sentido e illimitada n'outro. Ao mesmo tempo, cada ordenada real tem necessariamente dous valores iguaes e de

signaes contrarios ; de sorte que a curva ainda se compõe de dous ramos, mas collocados nas duas regiões adjacentes, e demais perfeitamente symetricos em torno do eixo que os separa, afastando-se emfim, cada um delles continuamente de ambos os eixos ao mesmo tempo. Taes são as indicações fundamentaes que sempre ministrará aqui a marcha geral da ordenada, quaesquer que sejam os valores dos expoentes m e n. Mas a discussão da tangente vai desvendar a necessidade de distinguir, neste caso que parece unico, dous generos verdadeiramente differentes, segundo fôr par ou impar o grau da equação. De facto, obtem-se então, para o coefficiente angular da tangente, a expressão final

$$\text{tang } \alpha = \frac{2n+1}{2m} \; a^{\frac{1}{2m}} \; x^{\frac{2n+1}{2m}} - 1.$$

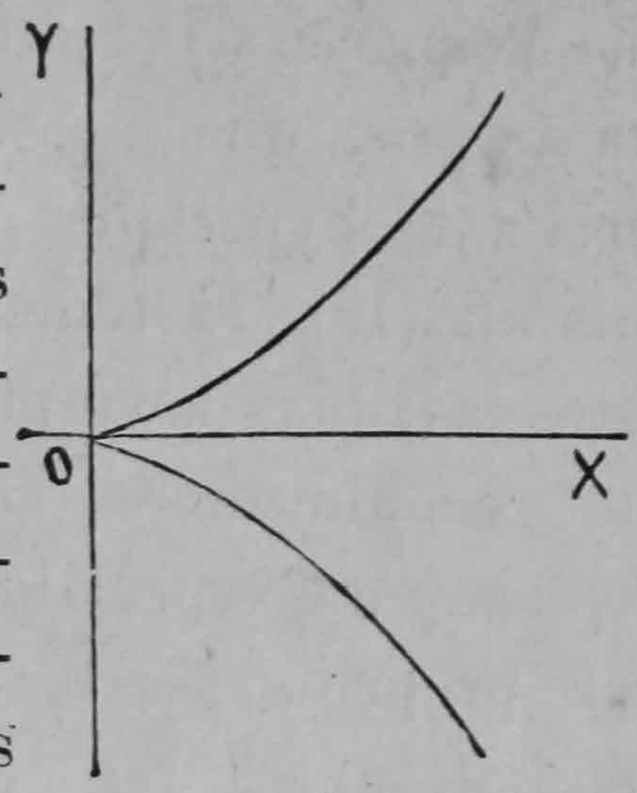
Si, pois, a equação é de grau par, isto é, si $2m$ é maior do que $2n+1$, sendo o expoente total de x negativo nesta funcção, será ella indefinidamente decrescente, e a curva voltará constantemente a concavidade para o seu eixo, que constituirá sua primeira normal, como na parabola propriamente dita, que evidentemente pertence a este genero. Pelo contrario, quando o grau da equação for impar, a funcção crescerá de continuo e sem limite, de sorte que a curva tornar-se-ha sempre convexa para o seu eixo,o qual lhe será tangente. No primeiro caso,a origem será um vertice propriamente dito, e um ponto de reversão no segundo. Emfim, estas duas sortes de curvas, como as do genero primitivo, não poderiam comportar a existencia de nenhuma asymptota rectilinea, e além disso são desprovidas de centro. Ter-se-hão, pois, as duas formas geraes indicadas pelas figuras 49 e 50, segundo for o expoente par superior ou inferior ao impar. A primeira, qualquer que seja o seu grau, não pode ser cortada por uma recta em mais de dois pontos, de sorte que as tangentes só encontram a curva uma vez; na segunda, toda a recta cortal-a-ha em um ou trez pontos, e cada tangente em dous. Estas diversidades geometricas



(*fig. 49*)

estão em plena harmonia com a noção algebrica relativa ao numero constantemente par das raizes imaginarias.

Taes são os tres generos perfeitamente naturaes que compõem a familia das parabolas, em que, sob diversos aspectos essenciaes, cada curva de certo assemelha-se mais a todas as do mesmo grupo do que a nenhuma das de outro, sem nenhuma consideração ao grau, cuja fraca influencia geometrica está realmente limitada só á determinação das especies, conforme as reflexões geraes do capitulo precedente.



(*Fig. 50*)

80.—A segunda familia das curvas binomias differe da primeira unicamente em achar-se mudada em inversa a razão directa das duas potencias constantemente proporcionaes. Mas, sob o ponto de vista geometrico, esta simples mudança analytica determina uma diversidade muito pronunciada entre as hyperboles e as parabolas. Comecemos suppondo, como no outro caso, que os dous expoentes sejam impares, o que agora corresponde ás hyperboles de grau par, segundo o typo

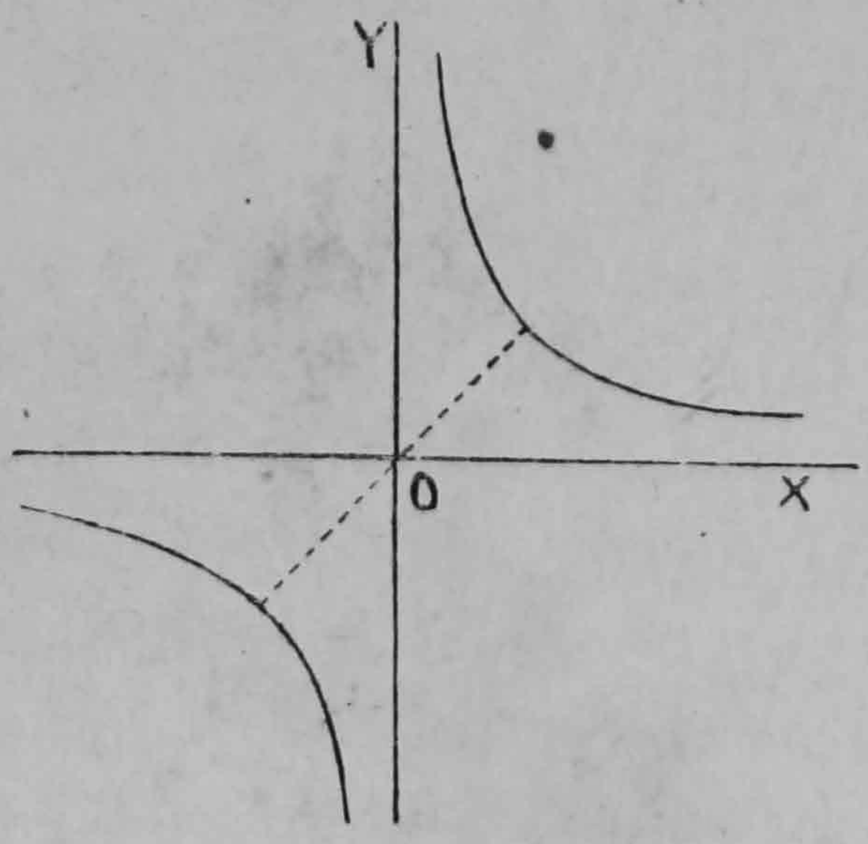
$$x^{2+n1}\ y^{2m+1} = a, \text{ donde } y = \sqrt[2m+1]{\frac{a}{x^{2n+1}}}.$$

A discussão fundamental da ordenada será a mesma que d'antes quanto á realidade e ao signal, de sorte que a curva se comporá ainda de dous ramos oppostos e identicos, tendo sempre a origem para centro. Mas, no que concerne á grandeza, a marcha será evidentemente inversa, pois que então a ordenada decresce quando cresce a abscissa e reciprocamente, sem que alem disso estas variações admittam limite algum: cada um dos eixos, pois, é então uma asymptota da curva. Quanto ao sentido da curvatura, já indicada por este duplo asymptotismo para a maior parte do curso, é facil reconhecer que jamais mudará, por que tem-se

$$\text{tang } \alpha = -\frac{(2n+1)y}{(2m+1)x},$$

e, por conseguinte, este coefficiente angular diminue continuamente si x augmenta, o que exclue qualquer sinuosidade (*fig. 51*).

Evidentemente comprehende este primeiro genero a hyperbole propriamente dita, quando os dous expoentes são iguaes, de modo que a equação seja reductivel á forma $xy=a$, que necessariamente seria a da hyperbole ordinaria, já definida (19), si tomassemos para eixos as duas asymptotas que já lhe reconhecemos, como demais explicaremos especialmente em logar proprio. Nesta especie primordial, apresenta a equação uma notavel propriedade, que d'outro modo não poderia existir, em virtude da sua perfeita symetria entre as duas variaveis. Nesta occasião, importa notar que, em geral, tal caracter analytico indica a symetria geometrica da curva correspondente em torno da bissectriz do primeiro angulo dos eixos, porque, sendo assim todos os pontos susceptiveis dous a dous de coordenadas reciprocas, d'ahi conclue-se facilmente que as distancias delles á origem são duas a duas iguaes e semelhantes inclinadas sobre esta bissectriz, em relação á qual elles acham-se, pois, symetricamente dispostos. Alem disso, como a equação actual não muda quando substitue-se y por $-x$ e x por $-y$, semelhante raciocinio prova que a curva é tambem symetrica em torno da segunda bissectriz, conforme a identidade geral dos dous ramos. Não se pode duvidar que esta dupla symetria não seja peculiar á hyperbole do segundo grau; porque, segundo a paridade necessaria que deve sempre existir entre as duas asymptotas, estas duas bissectrizes são evidentemente os unicos *eixos* que podem ser admittidos por hyperboles de grau par; ora, estas não poderiam de certo comportal-os, sinão em caso de igualdade dos dous expoentes. Assim, as idéas de symetria, que esta especie primitiva recorda espontaneamente, devem ser inteiramente separadas, para elevar-se convenientemente á verdadeira noção geometrica do genero correspondente. (·)



(*Fig.* 51)

(·) A respeito desta especie excepcional, convem esclarecer aqui uma apparente contradicção relativa ao numero de pontos determinantes, que, segundo a equação $x^m y^m = a$, deve sempre limitar-se a quatro em todas as curvas hyperbolicas, como nas parabolicas, conforme a nossa theoria fundamental, ao passo que, por outro lado, já reconhecemos ser elle igual a cinco na hyperbole ordinaria. Mas esta

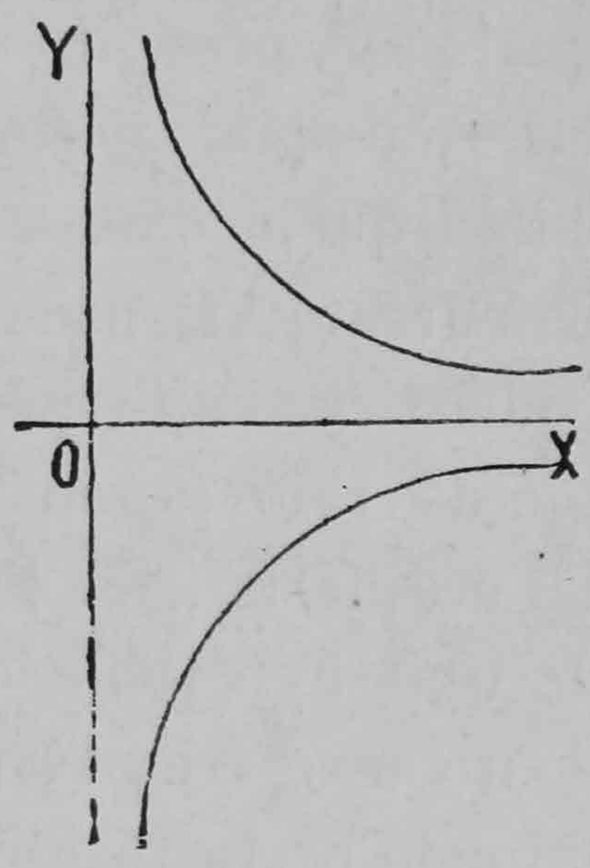
Examinemos agora o segundo genero de hyperboles, em que um dos dous expoentes é par e outro impar, de sorte que então a equação é sempre de grau impar, conforme o tydo $y^{2m} x^{2n+1} = a$ que dá

$$y = \pm \sqrt[2m]{\frac{a}{x^{2n+1}}}.$$

Como no segundo caso das equações parabolicas, a curva se comporá de dous ramos iguaes e adjacentes, symetricamente dispostos em torno do eixo dos x. Do mesmo modo que acima, cada um delles terá ainda os dous eixos para asymptotas. Quanto á marcha das tangentes, não offerecerá ella evidentemente nenhuma diversidade essencial, segundo a formula

$$\text{tang } \alpha = - \frac{2n+1}{2m} \frac{y}{x},$$

que continua a excluir toda e qualquer sinuosidade (*fig. 52*). Taes são as unicas differenças fundamentaes que possam ter lugar entre as hyperboles de grau impar e as de grau par: a sua distincção se pode resumir na auseneia ou existencia de um centro.



(*Fig. 52*)

Aqui devemos observar que o segundo caso das curvas hyperbolicas de modo nenhum comporta a divisão que exigiu o caso analogo das curvas parabolicas, segundo a ordem de grandeza dos dous expoentes. De facto, esta distincção, sem influencia alguma sobre a marcha geral da ordenada, não se refere sinão á tangente, cujo coefficiente angular torna-se aqui sempre decrescente, quer seja o expoente par que exceda ao impar, quer esté áquelle.

---

falta de accordo e devida unicamente a só considerarmos aqui hyperboles de asymptotas rectangulares, e a que, si os eixos fossem obliquos, não deixaria de ser dado o angulo das asymptotas, o que deve naturalmente diminuir de uma unidade o numero de condições determinantes, que, com effeito, se elevaria a cinco para todas as hyperboles, si considerassemos como indeterminada a inclinação de suas asymptotas,

A mesma explicação dissiparia tambem a contradicção analoga que pareceria apresentar a theoria da semelhança.

Assim, a familia das hyperboles só comprehende realmente dous generos, embora a das parabolas contenha tres. No primeiro genero, de grau par, nenhuma recta pode cortar a hyperbole em mais de dous pontos; no segundo, de grau impar, a hyperbole admitte tres pontos em linha recta; demais, é mister em cada caso ter em attenção as restricções necessarias relativas de uma parte ás tangentes, de outra ás parallelas ás asymptotas.

Em relação a estes dous generos de hyperboles, convem, para melhor conceber a forma d'elles, determinar o ponto mais proximo da origem, em que sempre se cruzam as duas asymptotas. Mas, em logar de applicar á funcção x^2+y^2, que exprime o quadrado desta distancia, o methodo geral dos *minima*, depois de ter reduzido as duas variaveis a uma só conforme a equação dada, obter-se-ha uma solução muito mais simples empregando um principio geometrico de *minimum*, que, comquanto particular a este genero de questões, não menos merece ser cuidadosamente apreciado, por causa da sua pronunciada utilidade em muitas occasiões. Este principio evidente é que — o mais curto caminho de um ponto a uma linha qualquer, primeiro recta e depois curva, lhe é sempre perpendicular—, o que, de certo, nenhuma difficuldade poderia offerecer, desde que, como no caso actual, pertença o ponto á convexidade da curva. Attento isto, o caracter analytico do ponto procurado consistirá simplesmente em que o coefficiente ángular da tangente e o do raio sejam reciprocos e de signaes contrarios, segundo a lei ordinaria (28). Si, pois, em geral, $x^n y^m = a$ designa a equação de uma hyperbole qualquer, do primeiro ou do segundo genero, o ponto mais aproximado da intersecção das asymptotas será determinado pela equação

$$\frac{n}{m}\frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \text{ donde } \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{m}{n}};$$

que logo indica a direcção do raio correspondente, e desde então as coordenadas especiaes do ponto procurado. Vê-se assim que este ponto notavel nunca pode ser equidistante das duas asymptotas, salvo na hyperbole do segundo grau, na qual $m=n$; estará elle sempre mais proximo da asymptota relativa ao mais forte expoente, o que está de pleno accordo com as nossas anteriores reflexões sobre a symetria.

Todas as curvas da familia das hyperboles, como as da familia das parabolas, podem ser exactamente quadradas por nossos methodos actuaes. Partindo da equação precedente $x^n y^m = a$, acha-se assim

$$S = \frac{a^{\frac{1}{m}}\left(x^{-\frac{n}{m}+1} - 1 \right)}{-\frac{n}{m}+1},$$

para a aria contada a partir de $x=1$. E' digno de nota que esta aria, estendida até cada uma das duas asymptotas, é sempre finita de um lado e infinita do outro. Com effeito, fazendo nesta formula as duas hypotheses, $x=0$ e $x=\infty$, que correspondem a estes limites, o termo variavel torna-se a principio nullo e depois infinito, ou reciprocamente, conforme seja o seu expoente positivo ou negativo, isto é, segundo seja m superior ou inferior a n. Dahi resulta que a aria, indefinidamente prolongada, tem constantemente um valor finito para a asymptota relativa ao mais alto expoente, ao passo que o seu valor total é, pelo contrario, infinito para a asymptota a que se refere o menor expoente. Para a hyperbole ordinaria, em que os dous expoentes são iguaes, a formula torna-se indeterminada, o que é devido a uma mudança de natureza da funcção correspondente, como explical-o-hei especialmente em seu logar, e então reconheceremos que os dous segmentos são semelhantemente infinitos.

Esta primeira classe de curvas, parabolicas e hyperbolicas, a unica em que até aqui se acham sufficientemente preenchidas as condições nocessarias de uma classificação verdadeiramente racional, deve ser en arada como offerecendo o typo o mais satisfactorio de discussão geometrica das equações. Vê-se assim como a natureza dos termos de uma equação binomia colloca logo a curva correspondente na familia das parabolas ou na das hyperboles, e como em seguida a apreciação comparativa dos dous expoentes determina facilmente a qual dos tres generos da primeira, ou dos dous da segunda, pertence o logar proposto. Tal esboço espontaneo, bem que limitado ao caso mais simples, pode já indi ar ao leitor intelligente o que sem duvida virá a ser um dia a geometria comparada, quando esta nova face universal da scienc a geometrica hoje tão desconhecida, tiver sido realmente constituida segundo as concepções geraes que lhe são proprias.

CAPITULO III

CURVAS TRINOMIAS

81.—O principio provisorio que, em falta de outro qualquer em summa conveniente, serve-nos aqui para classificar geometricamente as equações algebricas, segundo o numero e a natureza dos seus termos, já não offerece sufficiente generalidade a partir mesmo das equações trinomias, em que não se tem mais certeza de que conduza a instituir grupos plenamente naturaes, como no capitulo precedente. Não obstante, judiciosa applicação delle é ainda utilissima para coordenar e variar os diversos exemplos, que devem caracterisar as principaes difficuldades relativas, em geral, á discussão geometrica das equações. Mui pouco pronunciadas em relação ás curvas binomias, estas difficuldades devem ser estudadas sobretudo nesta segunda classe, cujo exame completo bastará de certo ao leitor para aprender convenientemente a bem discutir as equações a duas variaveis. E' o que vai constituir agora o objecto essencial desta terceira parte da geometria plana, pois que a imperfeição actual da sciencia obriga-nos demais a renunciar ainda as especulações superiores da geometria comparada, que tive de limitar-me a fazer entrever.

Como as diversas categorias geometricas são aqui ao mesmo tempo mais numerosas e extensas do que a respeito das equações a dous termos, não nos será possivel esgotar tão plenamente como no capitulo precedente a apreciação detalhada de cada uma dellas. Limitar-me-hei a completar este exame para a mais simples categoria que comprehende um termo relativo a cada variavel e um termo constante. Quanto ás outras mais complicadas, em que os casos mais se multiplicariam, indicarei somente um pequeno numero de exemplos caracteristicos, deixando ao leitor o prosegui-
mento espontaneo, segundo as mesmas distincções, de taes series de estudos, cujos desenvolmentos proprios levar-nos-hiam demasiado longe, sem aliás comportar nenhuma sufficiente utilidade, quer scientifica, quer logica. De resto, todos os exemplos considerados neste capitulo, bem que relativos a expoentes determinados, para me hor fixar as idéas facilitando os calculos, serão sempre tratados de maneira a constituir outros tantos typos dos casos ana-

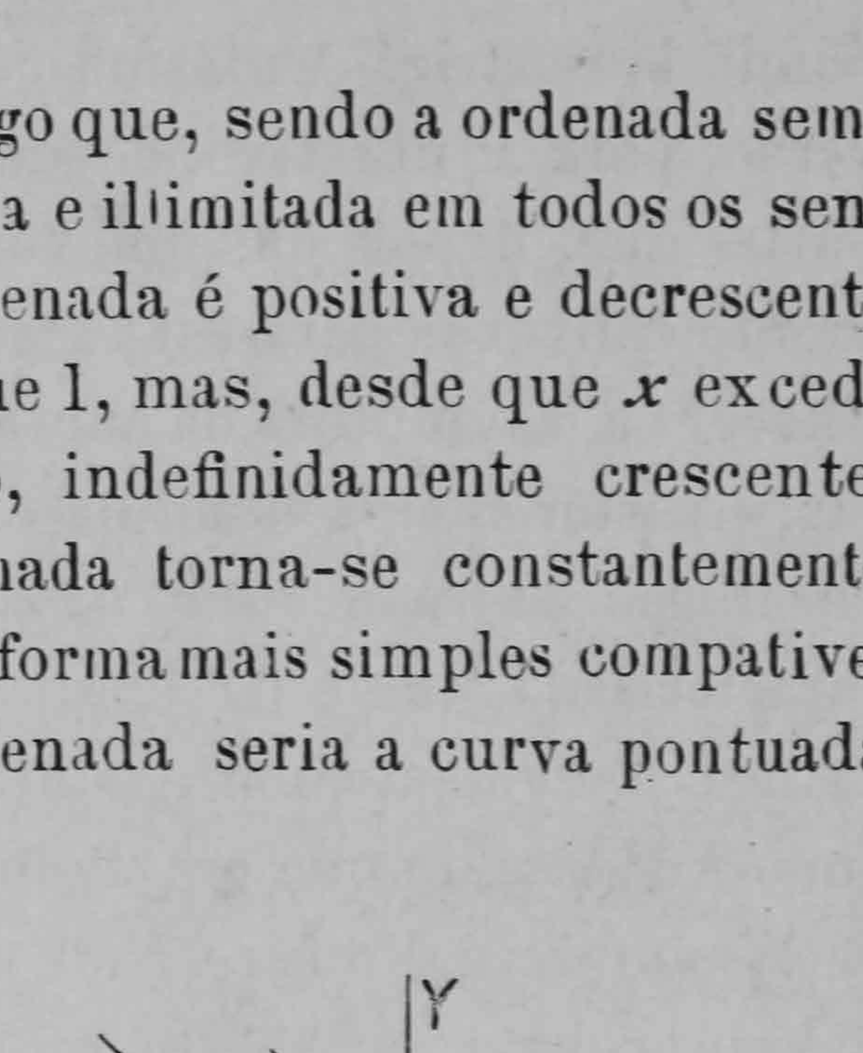
logos que seriam produzidos por outros expoentes quaesquer sujeitos ás mesmas condições.

Na primeira classe das equações trinomias, sob a forma $y^m+ax^n=b$, os dous expoentes podem a principio ser simultaneamente impares, e então iguaes ou desiguaes. Consideremos um exemplo de cada especie.

Primeiro exemplo.— Seja a equação $y^3+x^3=1$. Para tornar este exemplo mais interessante, suppuz, aiém da igualdade dos expoentes, a dos coefficientes, de sorte que assim a curva torna-se symetrica ao redor da primeira bissectriz; mas d'ante-mão induzo o leitor a não ligar muita importancia a esta particularidade, cuja ausencia manteria em essencia a figura geral que vamos reconhecer, embora sem a condição da symetria acima, como, demais, se poderá verificar facilmente por um outro exemplo comparativo, em que não tenha logar este accidente.

A formula $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ mostra logo que, sendo a ordenada sempre real e unica, a curva será continua e illimitada em todos os sentidos. Quando x é positivo, a ordenada é positiva e decrescente de 1 a 0, emquanto x não é maior que 1, mas, desde que x excede a 1, torna-se negativa e, desde então, indefinidamente crescente. Quando, porèm, x é negativo, a ordenada torna-se constantemente positiva e cresce sem limite. Assim, a forma mais simples compativel com o conjuncto da discussão da ordenada seria a curva pontuada da figura 53.

Segundo o coefficiente angular da tangente, $\text{tang}\,\alpha=-\frac{x^2}{y^2}$, as tangentes em A e B são de certo perpendiculares aos eixos correspondentes, de sorte que ha sinuosidade; em C, sobre a bissectriz que serve de eixo á curva, tem-se $\text{tang}\,\alpha=-1$, e este ponto é por conseguinte um vertice. Demais, a curva é sempre concava para a origem desde A até B, pois que esta funcção continúa evidentemente a crescer entre estes limites.



(*Fig. 53*)

Alem delles, não se pode mais apreciar a marcha sinão pela sua reducção a uma só variavel, sob a forma

$$\text{tang } \alpha = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}.$$

Ora, dividindo os dous termos por x^2, tem-se

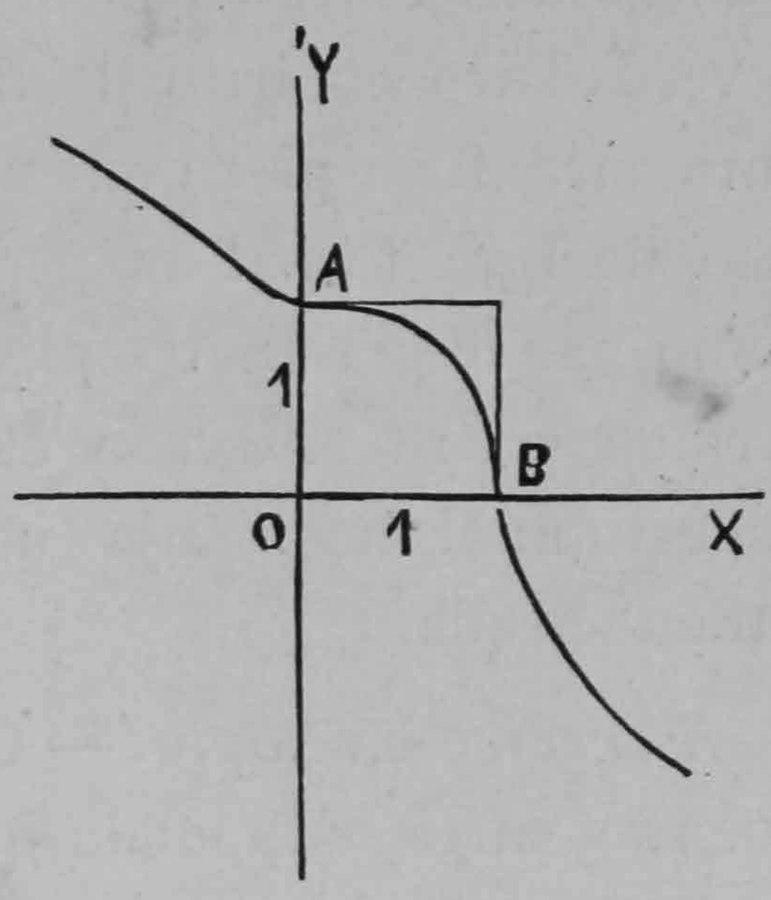
$$\text{tang } \alpha = \frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}},$$

e reconhece-se logo que esta funcção, a principio necessariamente decrescente a partir do $x=1$ que a tornava infinita, jamais cessa de diminuir tendendo ao limite —1, que indica a direcção da segunda bissectriz. A mesma cousa acontece, porém em sentido inverso, para x negativo, de sorte que este limite é commum ás duas partes que, depois das inflexões A e B, são desde então indefinidamente convexas para esta segunda bissectriz, na qual é facil reconhecer a asymptota da curva, como tenho tido occasião de explicar. Assim comprehendida entre uma tangente e uma asymptota parallelas entre si, esta curva de dupla inflexão está agora assaz caracterisada, alem da sua symetria em torno de OC. A sua curvatura é evidentemente muito mais pronunciada entre as duas sinuosidades, do que em todo o resto do seu curso; pois que este pequeno intervallo faz variar de 90° a direcção da tangente, que em todo o prolongamento indefinido da curva muda apenas de 45°. Procurando, segundo o principio especial empregado no capitulo precedente, o ponto mais aproximado da origem, d'onde partem desde já as trez normaes OA, OC, OB, é claro que as duas extremas devem corresponder a um *minimum*, pois que alem ha crescimento, e a do meio a um *maximum*, como o confirmam suas respectivas grandezas. Este exemplo offerece-nos occasião natural de completar esse ut l principio geometrico, observando que o caminho normal, sempre *minimum* quando parte da convexidade, é, ao contrario, ora *minimum*, ora *maximum*, partindo da concavidade, segundo a posição do ponto de partida sobre a normal correspondente. Esta distincção directamente evidente para o circulo, apresenta aliás, a respeito de uma curva qualquer, verdadeiras

difficuldades que a analyse ordinaria é pouco propria a superar, e cuja solução geral deve o leitor adiar.

Seria superfluo estabelecer expressamente que o conjuncto da discussão precedente convem em essencia a todas as curvas do genero $y^{2m+1}+x^{2m+1}=1$, com simples differenças secundarias, resultantes do grau.

Segundo exemplo.—Supponhamos agora a equação $y^3+x^3=1$, em que os dous expoentes impares são desiguaes. Esta differença não poderia influir na marcha geral da ordenada. Quanto á tangente, tem-se tang $\alpha=-\frac{3x^2}{5y^4}$, e de A a B (*fig. 54*) a funcção procede como acima, com as mesmas inflexões, excepto, porem, no que diz respeito á posição da normal intermediaria. Mas, alem de B, tem-se aqui



(*Fig. 54*)

$$\text{tang } \alpha=\frac{-3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3-1)^4}}=\frac{-3}{5\sqrt[5]{x^2-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^4}-\frac{4}{x^7}+\frac{1}{x^{10}}}}.$$

Annullando-se esta funcção para x infinito, a curva, constantemente concava para o eixo dos x, não comporta mais asymptota deste lado. Mudando-se o signal de x, obtem-se o mesmo valor extremo; assim, depois da inflexão A em que a tangente é parallela a este eixo, a curva, a principio convexa, acaba tambem por tornar-se concava e sem asymptota possivel. Existe, pois, á esquerda uma nova inflexão correspondente ao *minimum* da funcção $\frac{x^{12}+4x^9+6x^6+4x^3+1}{x^{10}}$; applicando-se-lhe o methodo que temos estabelecido, achar-se-ha sem difficuldade $x=\sqrt[3]{5}$ para a abscissa deste ponto notavel. Esta terceira inflexão e a ausencia de asymtotas distinguem profundamente esta curva da precedente, caracterisando a influencia irrecusavel da desigualdade dos dous expoentes.

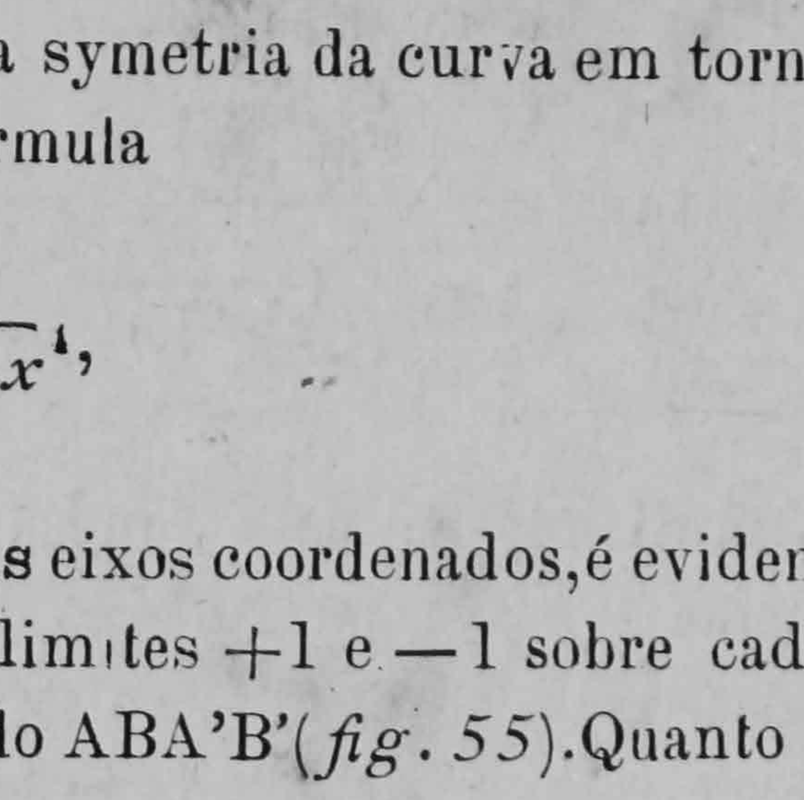
A proposito désta primeira comparação, devo em geral recom-

mendar ao leitor que não se limite, como até aqui se tem feito sempre, a discutir isoladamente cada uma das equações que lhe servirem successivamente de exercicio, mas que em seguida compare judiciosamente os resultados de cada discussão com os dos casos anteriores que lhe forem bastante analogos. Esta apreciação comparativa augmentará muito a utilidade logica de um tal estudo geometrico, que, assim feito, poderá, com um pequeno numero de exemplos bem escolhidos, fazer profundamente sentir o verdadeiro espirito desta parte essencial da geometria plana. Para garantir a plena efficacia de semelhantes comparações, é preciso sempre tornal-as perfeitamente claras, sujeitando-nos aqui, como nas experiencias physicas bem instituidas, a nunca compararmos entre si sinão casos geometricos differentes sob um só aspecto analytico, cuja influencia final será assim distinctamente caracterisada.

Terceiro exemplo. — Consideremos agora o caso dos dous expoentes pares, suppondo-os a principio iguaes, segundo o exemplo $y^4+x^4=1$, em que a igualdade simultanea dos dous coefficientes arrasta aliás accidentalmente a dupla symetria da curva em torno das duas bissectrizes. Segundo a formula

$$y=\pm\sqrt[4]{1-x^4},$$

a curva, já symetrica ao redor dos dous eixos coordenados, é evidentemente fechada e contínua entre os limites $+1$ e -1 sobre cada eixo, de modo a ser contida no quadrado ABA'B' (*fig. 55*). Quanto á tangente, o seu coefficiente angular $-\frac{x^3}{y^3}$ mostra claramente que cada um dos oitavos identicos de que se compõe a curva, é sempre concavo para o centro, e que os oito pontos em que ella encontra os seus quatro eixos geometricos constituem outros tantos vertices, de sorte que emfim ella é inscripta a um octogono quasi regular.



(*Fig. 55*)

Nas duas extremidades de cada oitavo, a distancia ao centro, conforme o principio das normaes, é evidentemente *maximum* segundo OC

e *minimum* segundo OB, pois que pode-se reconhecer facilmente que OC é maior que OB (·)

Além da comparação deste exemplo com o primeiro, para bem colligir a grande influencia geometrica da substituição dos expoentes pares aos impares, é natural comparar a curva actual com o circulo $y^2+x^2=1$, de que a principio parece difficil bem distinguil-a geometricamente. Quanto á ordenada, reconhece-se assim sem incerteza que a curva é circunscripta ao circulo, pois que a funcção $\sqrt[4]{1-x^4}$ sempre excede, entre 0 e 1, á funcção $\sqrt{1-x^2}$: o *maximum* de afastamento está sobre as bissectrizes. A marcha das tangentes confirma esta diversidade, mostrando que os oito vertices são os unicos pontos da nossa curva, em que se reproduz o caracter constante da tangente ao circulo, isto é, ser sempre perpendicular ao raio correspondente. Poder-se-hia, pois, figurar grosseiramente que esta curva e suas diversas analogas $y^6+x^6=1$ $y^8+x^8=1$, etc., provenham de uma especie de uniforme dilatação thermometrica de um circulo metallico mettido em um caixilho não dilatavel ABA'B' que, impedindo o afastamento dos vertices que o tocam, produzisse uma intumescencia crescente até o meio de cada intervallo.

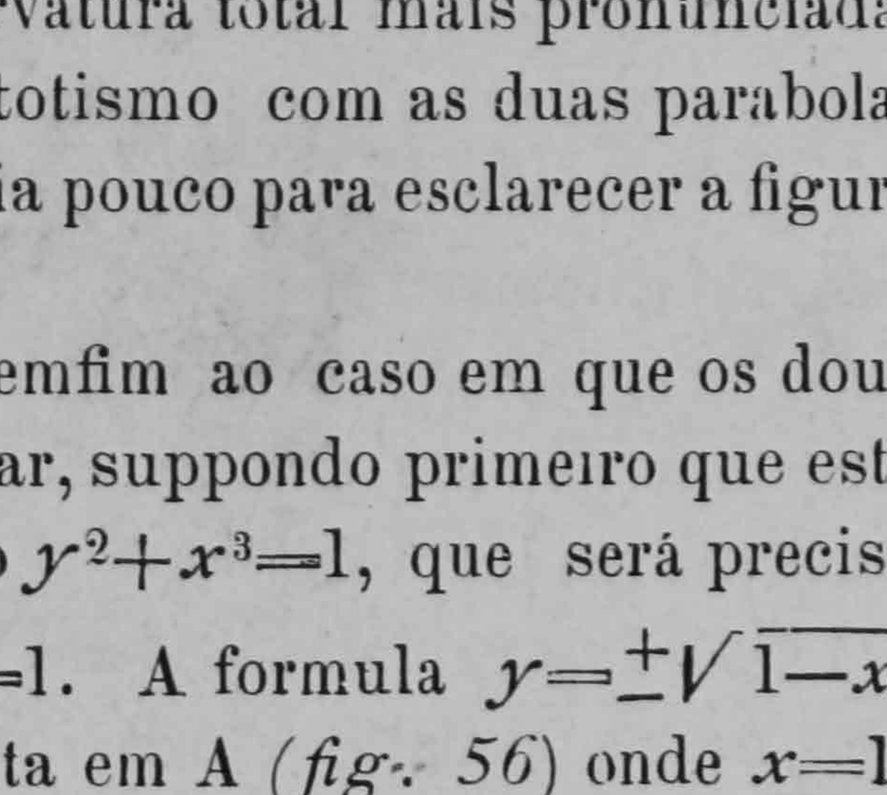
Quarto exemplo. — Para ter completamente apreciado o caso dos dous expoentes pares iguaes entre si, é mister considerar, como novo exemplo, a equação $y^4-x^4=1$, em que a opposição dos signaes determina uma profunda differença geometrica, que não podia existir com potencias impares, susceptiveis de assim mudar em consequencia de uma simples transposição de um para outro lado de um dos eixos coordenados. Este contraste deve ser essencialmente analogo ao que já vimos, na primeira parte deste tratado, resultar de um semelhante motivo algebrico entre a ellipse e a hyperbole. Consiste sobretudo em que a curva, em vez de ser fechada e contínua, torna-se illimitada e descontínua; as duas bissectrizes deixam de ser eixos, para se tornarem asymptotas: a curvatura do conjuncto da curva é, pois, a todos os respeitos, muito menos pronunciada do que acima.

(·) Por erro do gravador estas distancias estão iguaes na figura, mas o leitor pode imaginar que a curvatura é mais pronunciada para o ponto C e seus analogos nas outras tres regiões, do que para os pontos A, B, A', B'.—NOTA DO TRAD.

Quintó exemplo.—Supponhamos agora que os dous expoentes pares sejam desiguaes, como na equação $y^2+x^4=1$, que naturalmente será preciso comparar a $y^2+x^2=1$ e $y^4+x^4=1$. A ordenada, cuja marcha geral será essencialmente conforme com a destes dous casos, terá, demais, um valor constantemente intermediario, de sorte que a curva achar-se-ha circumscripta ao circulo, e entretanto, inscripta á da figura 55. Quanto á tangente, não comporta aqui outra observação essencial alem da relativa á normal media entre OA e OB, que desde então deixará de coincidir com a bissectriz, em virtude da falta de symetria segundo OC.

Sexto exemplo.—Consideremos ainda, a este respeito, a equação $y^2-x^4=1$, que deverá ser geometricamente comparada, de um lado com a precedente, de outro com $y^4-x^4=1$. Para com esta, a differença consistirá sobretudo na ausencia de asymptotas rectilineas, donde resultará uma curvatura total mais pronunciada. Será facil verificar aqui o asymptotismo com as duas parabolas $y=\pm x^2$, o qual comtudo contribuiria pouco para esclarecer a figura geral da curva.

Setimo exemplo. — Passemos emfim ao caso em que os dous expoentes são um par e o outro impar, suppondo primeiro que este exceda áquelle, como no exemplo $y^2+x^3=1$, que será preciso comparar sobretudo com $y^3+x^3=1$. A formula $y=\pm\sqrt{1-x^3}$ indi a a limitação da curva á direita em A *(fig. 56)* onde $x=1$, e sua extensão indefinida á esquerda, ficando aliás sempre symetrica em torno de OX. Attento o coefficiente angular da tangente, $-\frac{3x^2}{2y}$, evidentemente a curva é sempre concava para a origem entre A e B ou B'. O principio das normaes ensinará facilmente que o ponto desta parte mais afastado da origem tem para abscissa $\frac{2}{3}$; esta distancia *maximum* excede tão pouco aos *minima* iguaes OA e OB, que de B para B' a curva quasi não differe de um semi-circulo. Mas, para alem tem-se



(Fig. 56)

$$\text{tang } \alpha = \frac{-3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = \frac{-3}{2\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x}}};$$

ora, esta funcção, a principio nulla nas inflexões B e B', augmenta continuamente e sem limite á medida que x cresce negativamente. Assim, a parte esquerda indefinida, muito menos curva do que a parte direita, comquanto desprovida de asymptota, é sempre convexa para o eixo das abscissas.

Oitavo exemplo.—Não falta mais, para ter rapidamente apreciado todos os casos essenciaes desta primeira categoria de equações trinomias, do que suppor que o expoente par seja superior ao impar, do que serve de exemplo $y^4+x^3=1$, que sobretudo deverá ser comparado ao precedente e ao primeiro. A marcha geral da ordenada é evientemente a mesma que acima. Quanto á tangente, não offerecerá tão pouco nenhuma differença importante do lado dos x positivos. Mas, na parte esquerda indefinida, ter-se-ha

$$\text{tang } \alpha = \frac{-3x^2}{\sqrt[4]{(1+x^3)^3}} = \frac{-3}{\sqrt[4]{x+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^5}+\frac{1}{x^8}}}.$$

Ora, a funcção sob o radical, a principio infinita para $x=0$, vem a sel-o tambem para $x=\infty$; de sorte que, no intervallo, o angulo α começa por augmentar, mas acaba logo por diminuir continuamente até zero. Assim a curva, primitivamente convexa á esquerda, como no caso precedente, não tarda a tornar-se sempre concava, e emfim parallela ao eixo, sem aliás comportar asymptota. Alem do par de inflexões B e B', existe, pois, um segundo, um pouco afastado do primeiro, e provindo do grau actualmente par. Para achar a posição precisa d'este, é necessario obter o *minimum* da funcção $\frac{x^9+3x^6+4x^3+1}{x^8}$. Igualando-o a uma ordenada auxiliar z, ser[á] mister, segundo o nosso methodo, procurar uma tangente parallela ao eixo dos x na curva correspondente, o que fornecerá, conforme a regra ordinaria, a condição $9x^8+18x^5+9x^2=8x^7z$. Tendo tirado a solução $x=0$ já conhecida, vem, substituindo a definição de z

$$9x^6+18x^3+9=\frac{8(x^9+3x^6+3x^3+1)}{x^3}.$$

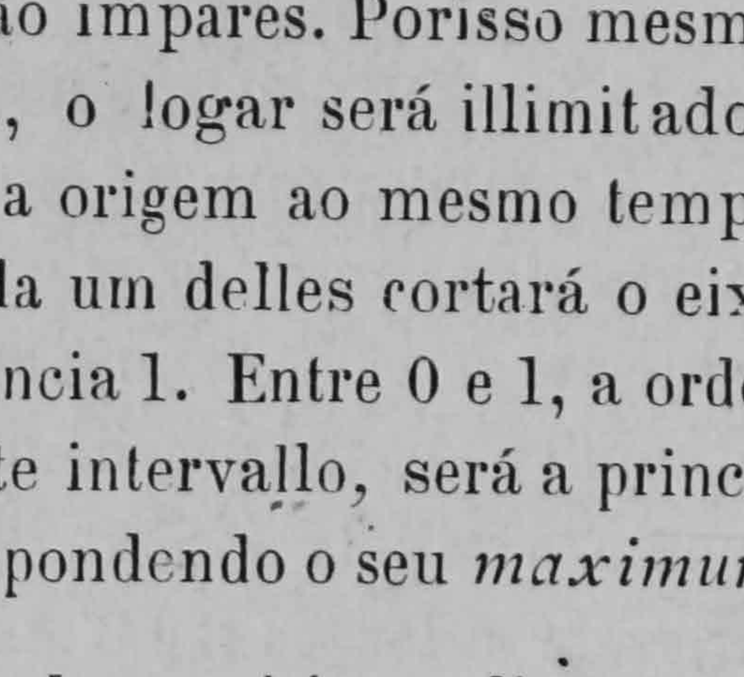
E' fa ilimo resolver esta equação final, observando-se que ella pode ser posta sob a forma

$$9(x^3+1)^2=\frac{8(x^3+1)^3}{x^3};$$

porque, suprimindo-se o factor commum inutil á questão, torna-se $9=\frac{8(x^3+1)}{x^3}$, donde resulta logo $x=2$, e por conseguinte $y=\sqrt{3}$, e $\alpha=150°$ para o ponto procurado.

82.— A segunda categoria das equações trinomias comprehende aquellas em que, continuando separadas as duas variaveis, uma dellas entra ao mesmo tempo em dous termos e a outra em um só. Esta coexistencia de taes expoentes deve evidentemente multiplicar muito mais as distincções geometricas do que no grupo precedente, limitado á comparação de dous expoentes. Tambem me reduzirei aqui a caracterisar, por alguns exemplos escolhidos, um pequeno numero destes casos, deixando ao leitor a discussão espontanea de todos os outros, o que elle poderá agora executar sem guia, em virtude do conjuncto dos habitos já contrahidos na discussão geometrica das equações.

Primeiro exemplo. — Consideremos a principio a curva $y=x^3-x$, em que os tres expoentes são impares. Porisso mesmo, sendo sempre a ordenada real e unica, o logar será illimitado e continuo, os dous ramos terão demais a origem ao mesmo tempo para centro e ponto de inflexão, e cada um delles cortará o eixo dos x, á direita ou á esquerda, á distancia 1. Entre 0 e 1, a ordenada, nulla nas duas extremidades deste intervallo, será a principio crescente e depois decrescente, correspondendo o seu *maximum* a $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$, segundo a regra das derivadas, aqui immediatament applicavel sem difficuldade ; mas, alem deste intervallo, a ordenada muda de signal e cresce desde então indefinidamente de uma e outra parte (*fig. 57*). O exame de coefficiente angular da tangente, $\text{tang}\,\alpha=3x^2-1$, nenhuma duvida deixa sobre o sentido por toda parte assignado á curvatura, nem sobre a ausencia total de asyptotas; a tangente ao centro evidentemente confunde-se com a segunda bissectrizes AA'.



(*Fig. 57*)

Uma comparação pouco aprofundada poderia dispor a confundir uma tal forma com a que convem ao primeiro genero de parabolas. Porem um exame mais attento fará claramente resaltar a differença

essencial dos dous casos, primeiro analyticamente, e depois geometricamente. Para isso basta referir a curva actual ás duas bissectrizes, que ahi se acham evidentemente collocadas, segundo o conjuncto da discussão precedente, como eixos proprios a este genero. As formulas de transposição serão agora

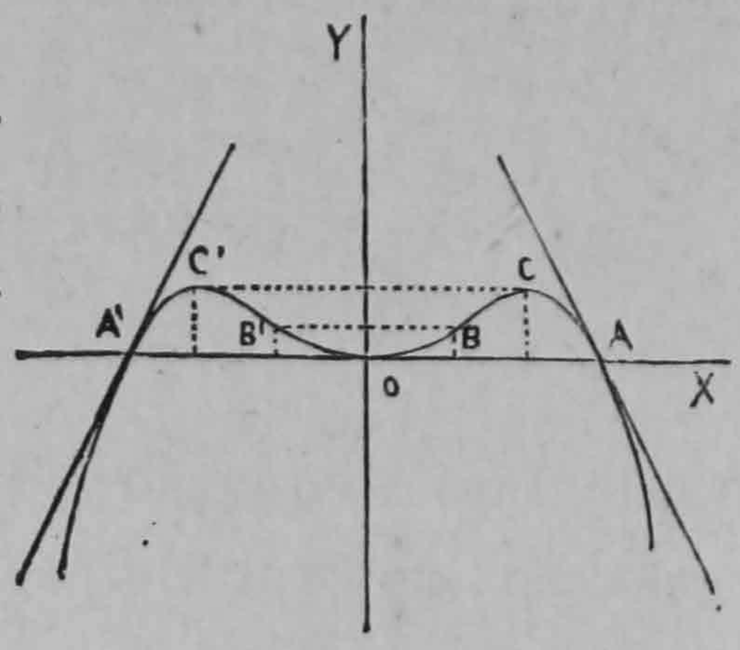
$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{y'-x'}{\sqrt{2}},$$

o que dará a equação $x'^3+3x'^2y'+3x'y'^2+y'^3-2y'=0$, que tanto differe da do capitulo precedente que interdiz logo qualquer aproximação semelhante.

Alem deste exemplo, em que o expoente impar da ordenada é igual ao menor expoente da abscissa, seria preciso, para ter verdadeiramente apreciado todos os casos de tres expoentes impares, considerar quatro novos em que o primeiro expoente fosse successivamente—igual ao maior dos dous outros, depois superior a este, em seguida comprehendido entre os dous, e, emfim, inferior ao menor.

Segundo exemplo.—Suppunhamos agora que, conservando-se impar o unico expoente da ordenada, os dous da abscissa tornem-se pares, tomando como unico exemplo, entre todos os diversos casos que esta condição comportaria, a muito simples equação $y=x^2-x^4$. Depois de ter directamente reconhecido a illimitação e continuidade do logar, bem como a symetria em torno do eixo dos y, é facil verificar que a ordenada, nulla para $x=0$ e $x=1$ e pos tiva no intervallo, attinge ahi o seu *maximum* $\frac{1}{4}$ para $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$; quando a curva tem atravessado o eixo das abscissas, delle se afasta indefinidamente. Mas a sua verdadeira figura é mais complicada do que a principio o indica esta discussão fundamental Na verdade, examinando a marcha das tangentes por meio da lei $\text{tang}\,\alpha=2x-4x^3$, percebe-se que, alem do *maximum*, a tangente é tambem dirigida segundo o eixo á origem, que é pois um vertice e não um ponto de reversão: por conseguinte deve existir uma inflexão no intervallo. Determinal-a-hemos procurando o *maxi-*

mum de tang α, o que dá immediatamente a equação $2-12x^2=0$, donde $x=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$, $y=\frac{5}{36}$, e tang $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. A curvatura soffre assim fortes variações no intervallo ACBOB'C'A' (*fig 58* alem do qual a direcção da tangente não esperimenta até o infinito uma mudança total de 30°, pois que em A e A' tem-se tang $\alpha=\mp 2$; demais, não ha evidentemente asymptota alguma.

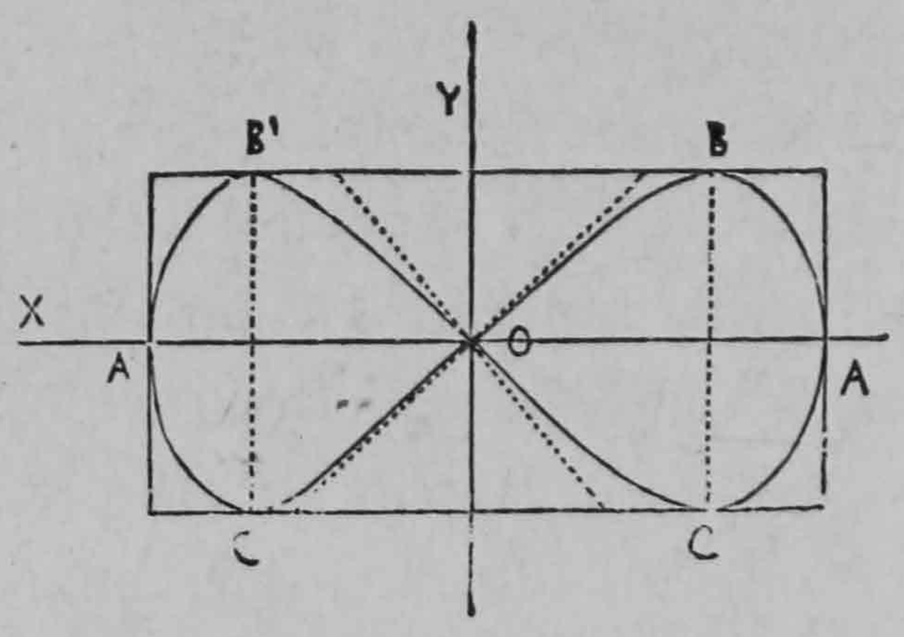


(*Fig. 58*)

Teaceiro exemplo. — Com exemplo unico do caso em que os tres expoentes são pares, discutamos a equação

$$y^2=x^2-x^4.$$

A ordenada, real somente de 0 a 1, attinge o *maximum* $\frac{1}{2}$ para a mesma abscissa que acima; de sorte que a curva, symetrica em torno dos dous eixos e tendo o centro na origem, é contida no rectangulo ABB'A'C'C (*fig. 59*). Quanto á tangente, segundo a lei tang $\alpha=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, é claro que todos os lados deste rectangulo tocam a curva, uns uma vez, outros duas. E' preciso sobretudo observar, a este respeito, o que se refere ao centro, em que tang $\alpha=\pm 1$ indica duas tangentes distinctas, dirigidas segundo as bissectrizes, como demais o confirmaria a consideração especial da relalação $\frac{y}{x}$. Esta nova propriedade fez dar o nome de *nó* a este ponto excepecional, já duplamente notavel a titulo de centro e de ponto de inflexão. O conjuncto de tal discussão não pode deixar duvida alguma sobre a figura geral desta curva, por cuja forma foi chamada *lemniscate*. Evidentemente a sua curvatura é muito menos pronunciada, em geral, do nó ao *maximum* B do que d'ahi ao vertice A; pois que o primeiro intervallo, bem que superior ao segundo, produz uma variação total de metade menor na direcção da tangente.



(*Fig. 59*)

Substituindo esta equação pela inversa $y^2=x^4-x^2$, conviria so-

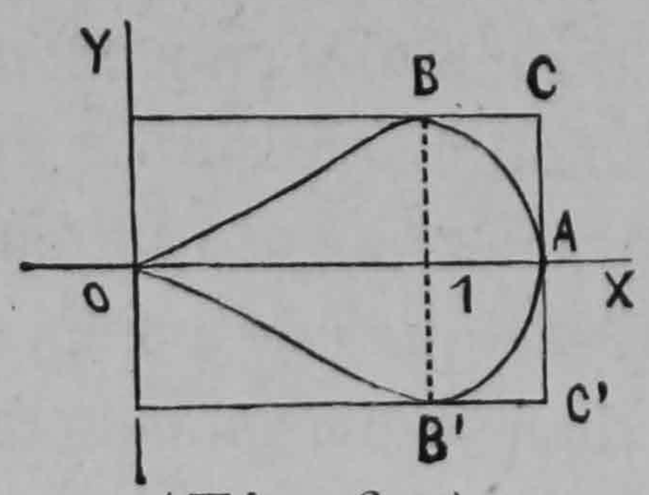
bretudo observar, além da costumada mudança de um logar fechado e continuo e um outro illimitado e interrompido, o novo caracter que ahi tomaria o centro, sempre collocado na origem. Vê-se que este ponto, longe de reunir muitos ramos distinctos, achar-se-hia isolado de todo o resto da curva, da qual, no entanto, continuaria a fazer parte, como o ponto *conjugado* da conchoide. Generalisando-se mais um tal contraste geometrico, é facil sentir que, em toda a equação da forma

$$y=\varphi(x)\pm\psi(x)\sqrt{f(x)},$$

as abscissas proprias a confundir os dous valores de y, não pela annullação da funcção posta sob o radical, mas pela do factor que o precede, indicarão nós ou pontos isolados, segundo tornem ellas positiva ou negativa a primeira funcção $f(x)$, pois que as ordenadas visinhas serão desde então ora reaes, ora imaginarias. Assim, oppostas que sejam geometricamente estas duas sortes de pontos, poderá convir-lhes o mesmo caracter analytico, com uma simples variedade relativa somente ao sentido de uma certa desigualdade. A differença, quanto á tangente, consistirá em que o seu coefficiente angular, sempre duplo n'um e n'outro caso, ficará real para o primeiro e tornar-se-ha imaginario para o segundo, como facilmente o confirma o exemplo precedente. Com quanto o typo analytico que acabo de formular esteja longe de offerecer, a este respeito, toda a generalidade conveniente, é contudo proprio a estender desde já as idéas do leitor sobre a opposição destes dous pontos singulares, quanto o comporta e exige aqui a nossa iniciação geometrica.

Quarto exemplo.— Para assignalar os casos em que, continuando par o expoente da ordenada, um dos da abscissa torna-se impar, consideremos em fim só a equação $y^2=x^3-x^4$. A curva, toda no lado direito, não se estende sinão da origem até $x=1$, symetricamente em torno do eixo, acima do qual a sua maior altura corresponde, segundo a regra das derivadas, a $x=\frac{3}{4}$, donde $y=\frac{3}{16}\sqrt{3}$, o que a encerra no retangulo OBAB' (*fig. 60*).

Tem-se aqui tang $\alpha = \frac{3x^2 - 4x^3}{2y}$, de sorte que os trez lados, BC, B'C' e CC', tocam a curva; mas, quanto ao quarto, em O a direcção da tangente parece a principio indeterminada. Procurando-a, quer pela substituição da



(*Fig.60.*)

ordenada, que dá tang $\alpha = \frac{3-4x}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, quer pela consideração especial da relação $\frac{y}{x}$, é facil reconhecer que a tangente coincide com o eixo das abscissas. Si, pois, dos dous pontos em que este eixo corta a curva, um, A, é um vertice propriamente dito, o outro, O, constitue um ponto de reversão. Assim, entre O e B ou B' deve existir um duplo ponto de inflexão, cuja unica abscissa corresponderà ao *maximum* de tang α ou ao da funcção $\frac{x(3-4x)}{1-x}$, segundo o espirito das transformações proprias á theoria dos *maxima*, em que tem-se sempre o direito de modificar, para maior simplicidade, as funcções propostas, com tanto que os *maxima* ou *minima* não cessem de corresponder aos mesmos valores da variavel independente.

83. — Introduzindo nas equações trinomias um termo em que estejam reunidas as duas variaveis, forma-se uma terceira categoria geral que, podendo comportar até quatro expoentes simultaneos, deve necessariamente offerecer ainda mais diversidade do que a precedente. Somente examinarei dous exemplos mui simples, um de grau impar e o outro de par.

Primeiro exemplo. — Seja em primeiro logar a curva $x^3 - xy^2 = 1$. Segundo a formula $y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$, ella estende-se indefinidamente á direita desde $x = 1$, afastando-se incessantemente do seu eixo; á esquerda, a ordenada, infinita para $x = 0$, o que indica o asymptotismo do eixo dos y, deve primeiro decrescer, mas não tarda a augmentar, pois que os accrescimos do termo x^2 em breve predominarão sobre as diminuições do termo $\frac{1}{x}$, e em seguida ella cresce até o infinito. Considerando de mais perto a

marcha geral desta funcção, percebe-se facilmente, segundo o methodo subsidiario das asymptotas, que as duas bissectrizes $y = \pm\sqrt{x^2}$ constituem duas outras asymptotas, collocadas abaixo da parte direita da curva e acima da parte esquerda. Attento o grau, o complexo destes documentos nenhuma incerteza deixa sobre a ausencia total de sinuosidades e reversões, sem que seja realmente necessario consultar a tangente, salvo para o *maximum* de y, assim determinado pela equação $3x^2 - y^2 = 0$, que o colloca sob um angulo de 120° em torno da origem, no ponto

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.$$

Si procurarmos os pontos mais proximos da origem, onde concorrem as tres asymptotas, é facil provar, segundo o principio das normaes, afastando a solução $y = 0$ correspondente ao vertice A, que elles se acham sobre os raios cujo coefficiente angular é $\sqrt{5}$, um pouco acima dos *minima* B e B' da ordenada. Assim, a figura 61 caracterisa exactamente a forma geral da curva.

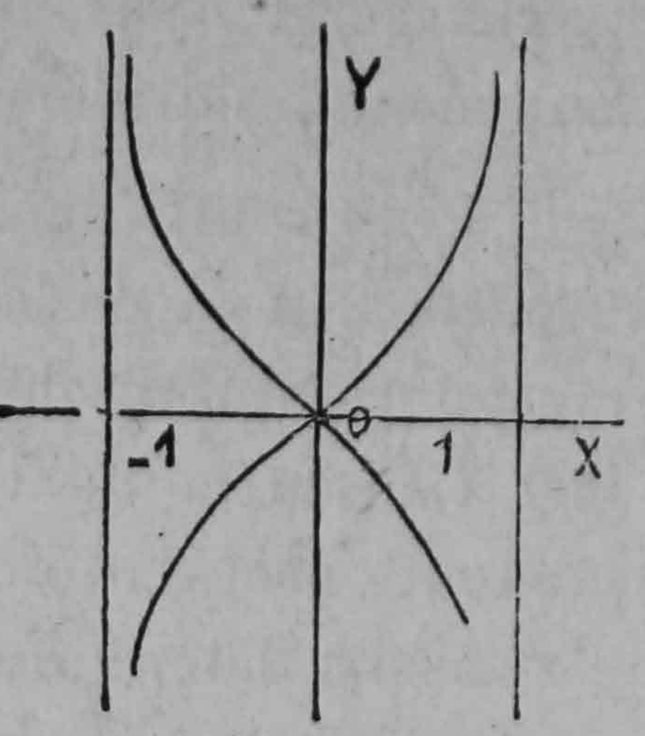
Segundo exemplo. —Consideremos em segundo logar a curva $y^2 - x^2y^2 = x^2$, onde

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(*Fig. 61*)

Evidentemente comprehendida entre as asymptotas $x = 1$ e $x = -1$, é ella illimitada no sentido vertical, e alem disso contínua e symetrica ao redor dos dous eixos. No centro, esta formula indica, segundo a relação $\frac{y}{x}$, a existencia de um nó, em que a curva toca as duas bissectrizes; de sorte que ainda aqui será superfluo examinar a marcha das tangentes para verificar a justeza da figura 62. Quanto á curvatura, no começo crescente, depois decrescente, de cada quarto da curva, deve ser em geral pouco pronunciada, em virtude da fraca variação total que experimenta a direcção das tangentes.

84.—A ultima categoria de curvas trinomias, aquella cuja discussão completa exigiria a maior diversidade de casos, comprehende equações as mais complicadas, em que as variaveis entram ao mesmo tempo em dous termos, sendo o terceiro constante. Limitar-me-hei, como para a precedente, a dous exemplos escolhidos, um de gran impar, o outro de grau par.



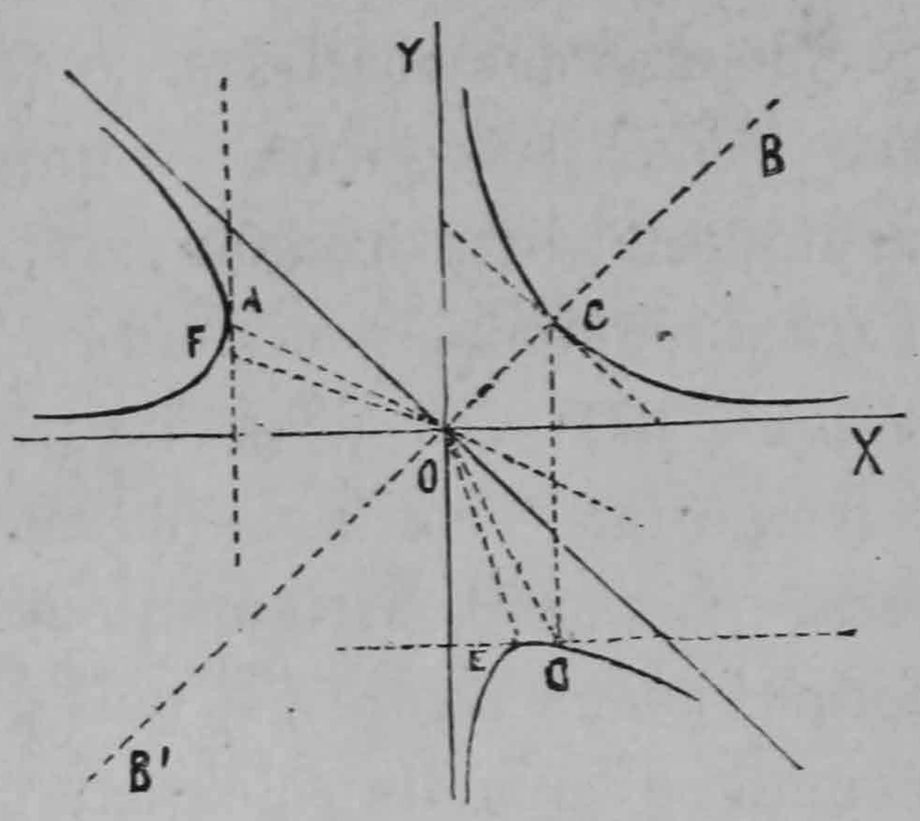
(*Fig. 62*)

Primeiro exemplo.—Seja a equação $xy^2+yx^2=1$, em que a symetria das duas variaveis indica desde já uma curva symetrica em torno da primeira bissectriz. A discussão da ordenada

$$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x}}$$

offerece aqui uma nova circumstancia preliminar que importa considerar, e é que a parte racional $-\frac{1}{2}x$, que precede o duplo radical, pertence a uma recta que, por uma tal relação algebrica, deve cortar ao meio todas as cordas verticaes do logar, pois que, para obter os dous pontos correspondentes a cada abscissa, será preciso igualmeute applicar de um e outro lado desta recta o valor do radical commum. Assim,alem da symetria segundo BOB' que a corta em C onde $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$, a curva terá para diametro a recta OA que ella encontra em A onde $x=-\sqrt[3]{4}$, e cuja consideração permittirá reduzir a discussão essencial da ordenada á do radical somente. Ora, este radical, a principio infinito, de maneira a indicar o asymptotismo do eixo vertical, não tarda a tornar-se crescente e desde então sem limites, pois que o augmento do termo $\frac{1}{4}x$ deve sem demora exceder ao decrescimento do termo $\frac{1}{x}$, que cada vez menos influe no valor total. Despresando este ultimo termo, segundo o espirito do methodo subsidiario das asymptotas, acham-se em torno da origem duas novas asymptotas $y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{1}{2}x$, das quaes uma coincide com o eixo das abscissas, e a outra com a se-

gunda bissectriz. A' esquerda, o radical torna-se $\sqrt{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x}}$ e a curva fica interrompida entre a asymptota OY e a vertical em A' alem da qual extende-se indefinidamente e sem descontinuidade. Mas então os dous valores da ordenada são igualmente positivos, de sorte que o logar não penetra na terceira região do plano, e acha-se alem disso abaixo da asymptota obliqua, cuja ordenada a hi excede á d'ella, tornando-se-lhe inferior no lado direito. Com quanto este exemplo seja um dos mais difficeis que pode offerecer a disscussão geometrica das equações pouco complicadas, o leitor judicioso não custará a sentir que a figura 63 aponta a unica forma geral propria a satisfazer ao complexo destas diversas indicações.



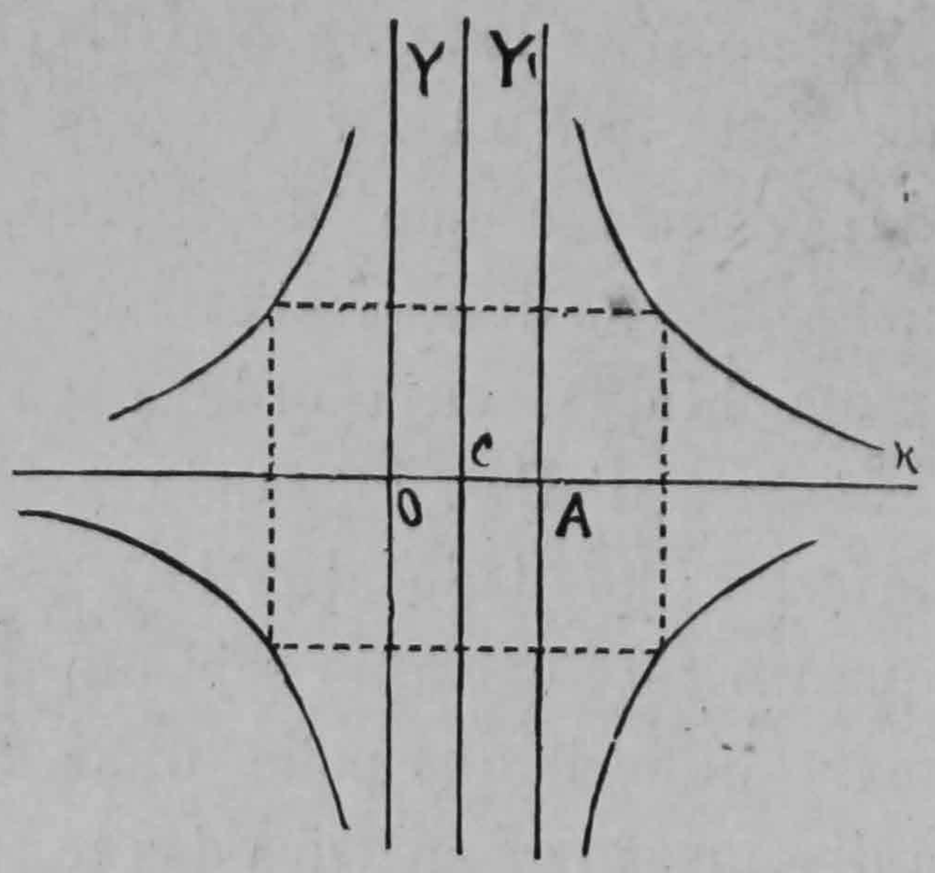
(*Fig. 63*)

O exame da tangente, segundo a formula $\text{tang}\,\alpha=-\frac{y}{x}\,\frac{y+2x}{2y+x}$, não é aqui indispensavel sinão para alguns pontos notaveis. Em C, sobre o eixo do logar, tem-se $\text{tang}\,\alpha=-1$, o que confirma ser este ponto um vertice; em A, sobre o outro diametro rectilineo, a tangente é vertical. Para achar o *minimum* de y na parte direita e inferior, é preciso pôr $y+2x=0$, d'onde resulta logo a direcção do raio correspondente, e em seguida $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; de sorte que esse ponto D está sobre a mesma vertical que o vertice C do outro ramo. Quanto ao ponto mais proximo da origem, o principio das normaes fornece facilmente a equação

$$m^3+2m^2-2m-1=0,$$

relativamente ao coefficiente angular do seu raio. Bem que do terceiro grau, esta equação resolve-se com facilidade, utilisando-se o conhecimento anterior de uma das tres normaes procuradas—a bissectriz OC—que ahi indica a raiz $m=1$, cuja verificação algebrica é aliás evidente, escrevendo-se $(m^3-1)+2m(m-1)=0$. Depois de tel-a tirado, resta a equação $m^2+3m+1=0$, que determina sem difficuldade as duas outras direcções OE e OF.

Segundo exemplo.— Consideremos emfim, como ultima curva trinomia, a que resulta da equação $x^2y^2 - xy^2 = 1$, em que $y = \pm \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$. A' direita, o logar começa na asymptota $x=1$, alem da qual estende-se indefinidamente, approximando-se sempre do eixo das abscissas, o qual lhe constitue uma segunda asymptota, bem como um eixo. Para a esquerda, nenhuma interrupção ha, e os dous eixos são asymptotas. O conjuncto da curva está, pois, necessariamente conforme com a figura 64, pois que demais o grau impede qualquer sinuosidade entre as asymptotas.



(*Fig. 64*)

Uma tal discussão naturalmente leva a suspeitar a inteira identidade das quatro partes da curva. Para nos certificarmos disto, basta evidentemente examinarmos si o ponto C, situado no meio do intervallo em que o eixo corta as outras duas asymptotas, é realmente o centro do lugar, o que se reduz a transportar a origem para ahi, afim de ver si resulta a desapparição espontanea do termo de grau par, o que effectivamente aconte e. A equação torna-se assim

$$x^2 y^2 - \frac{1}{4} y^2 = 1,$$

de maneira a entrar na categoria precedente. Esta nova equação seria, pois, preferivel para o estudo ulterior da curva. Applicando-a á busca do ponto mais proximo do centro, o principio das normaes ahi dá a condição $\frac{4xy}{4x^2-1} = \frac{x}{y}$, donde, depois de ter tirado o factor superfluo, resulta $y^2 = x^2 - \frac{1}{4}$, e por conseguinte $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = 1$; assim, neste ponto tem-se $x = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $y = 1$, e $\text{tang } \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Facilmente se confirmaria este resultado pela procura directa do *minimum* de x^2+y^2 por meio do methodo algebrico o mais elementar, que aqui seria muito praticavel.

CAPITULO IV

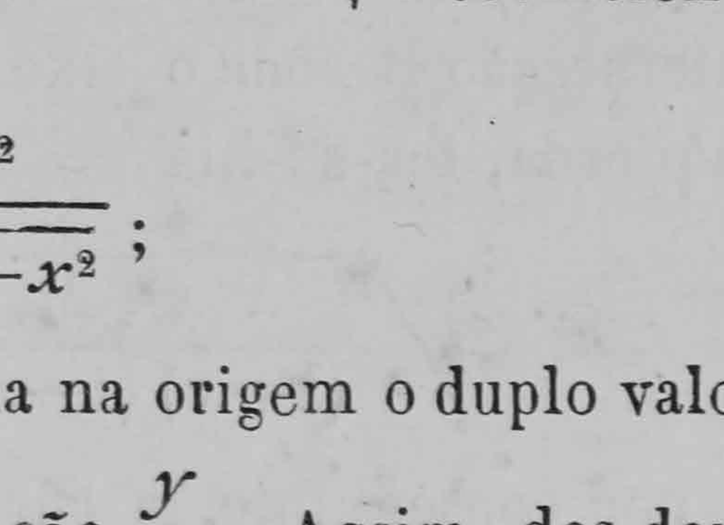
CURVAS POLYNOMIAS

85.—No estado de infancia em que acha-se hoje a geometria comparada, o principio provisorio de que nos temos servido precedentemente para classificar as curvas algebricas, e que não podia ser plenamente satisfactorio sinão só para as equações binomias, deixa de offerecer uma verdadeira importancia geometr ca, quando as equações contêm mais de tres termos. Tambem, para essas equações mais complicadas, é mister limitarmo-nos aqui a alguns exemplos escolhidos independentemente de toda classificação, e apenas destinados a fazer sentir como pode-se estender a todas as outras equações algebricas, o modo de discussão geometrica caracterisado nos capitulos precedentes.

Primeiro exempio.— Consideremos em primeiro logar a curva $y^2=x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Segundo a formula $y=\pm x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, o logar, symetrico em torno do eixo das abscissas, é limitado á direita pela asymptota $x=1$, e á esquerda não passa da sua interseccão com o eixo á distancia 1 da origem. Compõe-se, pois, de duas partes que se reunem na origem,—uma á esquerda, fechada de todos os lados, a outra á direita, illimitada verticalmente. Em fim, o coefficiente angular da tangente é

$$\text{tang } \alpha=\frac{1+x-x^2}{(1-x)\sqrt{1-x^2}};$$

elle torna-se infinito para $x=\pm 1$, e toma na origem o duplo valor ± 1, aliás indicado d'ante-mão pela relação $\frac{y}{x}$. Assim, dos dous pontos, A e O (*fig. 65*), em que a curva encontra o seu eixo, o primeiro é um vertice, o segundo um nó, onde ella toca nas duas bissectrizes, acima das quaes eleva-se em seguida cada vez mais o seu curso indefinido. Quanto ao ponto culminante da parte esquerda, corresponde á equação $1+x=x^2$, que dá $x=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, depois de ter



(*Fig. 65*)

posto de parte a raiz positiva, como excedendo os limites horizontaes do logar. Portanto não se pode mais conservar nenhuma duvida sobre a forma geral da curva. A curvatura, muito pronunciada na porção BAB', o é muito menos no resto da parte fechada, e diminue ainda mais na parte indefinida. Devendo o centro achar-se sobre a curva por ser impar o grau, e ao mesmo tempo sobre o eixo das abscissas em virtude da symetria, é claro que esta curva não o comporta, pois que elle deveria estar collocado em O ou em A, em contrario ao complexo da discussão.

Segundo exemplo. — Seja agora a equação $y^2 = \frac{2x-x^2}{x^2-1}$, d'onde

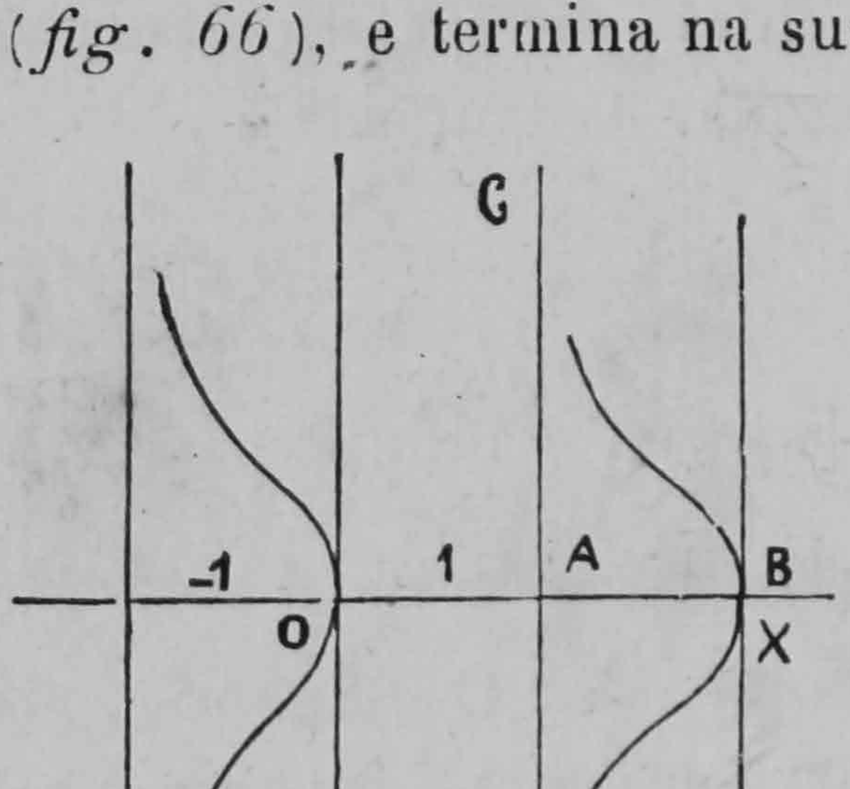
$$y = \pm\sqrt{\frac{x(2-x)}{(x-1)\,(x+1)}},$$

esta decomposição em factores é destinada a caracterisar melhor a marcha geral da ordenada. A' direita, cada termo da fracção encerra um factor positivo, de sorte que y só será real em quanto os outros factores $2-x$ e $x-1$ tiverem o mesmo signal, o que restringe x entre 1 e 2, pois que demais estes factores não poderiam tornar-se simultaneamente negativos. Esta parte da curva não começa pois sinão na asymptota CC' (*fig. 66*), e termina na sua intersecção B com o eixo. Para a esquerda, ter-se-hia

$$y = \sqrt{\frac{x(x+2)}{(1+x)\,(1-x)}}$$

e, por conseguinte, a curva só se estenderia da origem até a asymptota $x=-1$. Por meio do coefficiente angular da tangente

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{x-x^2+1}{2(1-x^2)\sqrt{(2x-x^2)\,(x^2-1)}},$$



(*Fig. 66*)

é facil verificar que os pontos B e O são vertices; assim, desde cada um delles até a asymptota correspondente, cada parte da curva deve apresentar uma inflexão, cujo calculo será laboriosissimo. Além disso, não poderia a curva ter centro, pois que este só poderia estar em A, meio entre aquelles dous vertices, o que é evi-

dentemente contrario á discussão. Todavia as duas partes, direita e esquerda, do logar parecem até o presente muito analogas. Para melhor apprehender a verdadeira relação, é preciso comparar duas ordenadas collocadas, sobre cada porção, á mesma distancia do vertice correspondente, fazendo successivamente $x=2-t$, $x=-t$' donde resulta primeiramente $y^2=\frac{t(2-t)}{(1-t)(3-t)}$, e em seguida $y'^2=\frac{t(2+t)}{(1+t)(1-t)}$. Abstracção feita dos factores communs, a segunda fracção $\frac{2+t}{1+t}$ excede evidentemente á primeira, como tendo ao mesmo tempo, para $t<1$, maior numerador e menor denominador, por tanto a parte esquerda se eleva mais do que a direita.

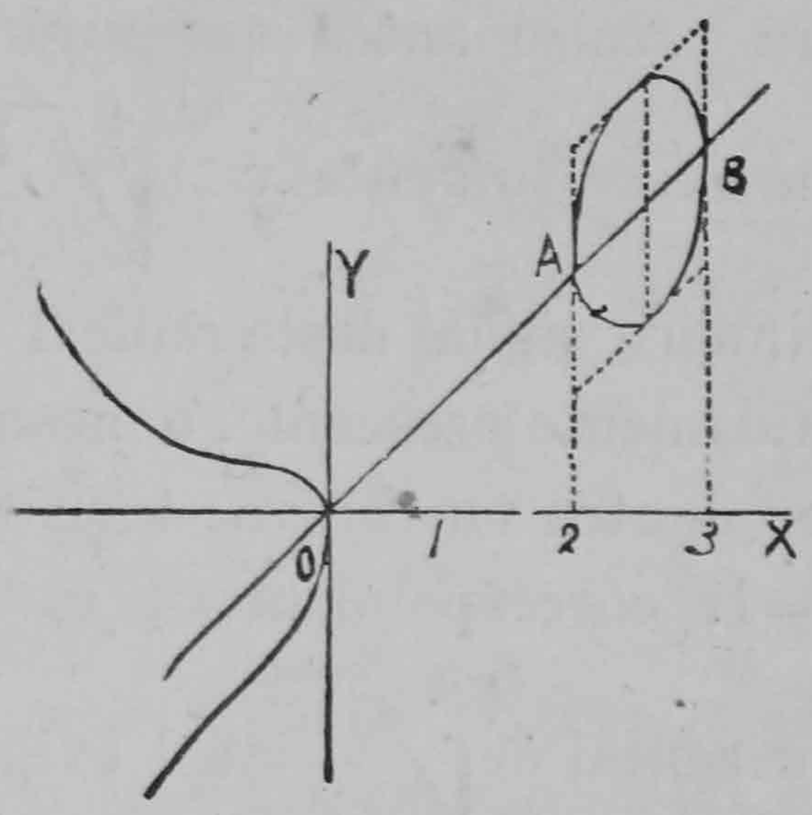
Terceiro exemplo.— Consideremos ainda a curva

$$y=x\pm\sqrt{5x^2-6x-x^3}.$$

O termo racional, collocado antes do radical, indica, como no numero precedente, para as cordas verticaes, um diametro rectilineo que aqui coincide com a primeira bissectriz, a qual corta o logar nos tres pontos $x=0$, $x=2$ e $x=3$. Decompondo a funcção irracional, afim de melhor julgar da sua marcha, tem-se

$$y=x\pm\sqrt{x(x-2)(3-x)}.$$

Desde então a curva não pode estender-se a não ser da segunda á terceira intersecção com o diametro, de A a B (*fig. 67*). Mas, á esquerda, sendo os dous primeiros factores sempre negativos, e o ultimo sempre positivo, o valor do radical será constantemente real e crescerá sem limites. Assim, curva compõe-se de duas partes, uma fechada, á direita, a outra á esquerda, indefinida, separadas por um intervallo vasio, de O até A. O *maximum* de afastamento da primeira para com o seu diametro facilmente



(*Fig. 67*)

se determinará, annullando a derivada de $5x^2—6x—x^3$, o que dará $x=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$, referindo-se a outra raiz a uma ordenada imaginaria; construindo-se o valor correspondente do radical, encerrar-se-ha esta porção do lugar entre duas parallelas ao diametro. Quanto á tangente, acha-se em fim, segundo as nossas regras,

$$\text{tang } \alpha = 1+\frac{10x—6—3x^2}{\sqrt{5x^2—6x—x^3}},$$

o que confirma a posição destas duas tangentes, e a verticalidade das que passam em O, A e B. Tornando-se infinita esta funcção para $x=\infty$, como mostra-o a divisão dos dous termos por x^2, reconhece-se assim a um tempo a ausencia de asymptotas e a existencia de uma dupla inflexão á esquerda, cuja posição precisa exigiria um calculo demasiado longo, bem como a do *maximum* ou a do *minimum* da ordenada á direita. Para que estas sinuosidades sejam conciliaveis com o grau, que não permitte aqui mais de tres pontos em linha recta, basta que a tangente seja dirigida de maneira a não cortar a parte fechada do logar.

Quarto exemplo.—Seja, em ultimo logar, a equação

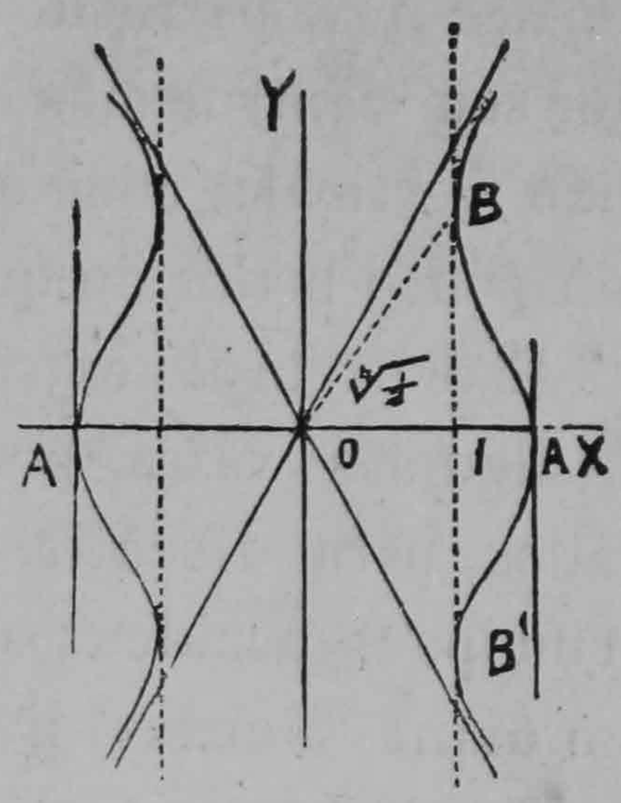
$$y^4—2x^2y^2—x^4+1=0,$$

cuja forma indica logo uma curva symetrica em torno dos dous eixos, com a origem para centro. Segundo a formula

$$y=\pm\sqrt{x^2\pm\sqrt{2x^4—1}},$$

será preciso antes assegurar-se da realidade do radical parcial, o que exige sómente $x>\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; mas vê-se em seguida que, si o primeiro signal deste radical dá sempre uma ordenada real e indefinidamente crescente, o mesmo não acontece com o signal inferior, que dentro em breve tornará y imaginario, a partir do valor $x=1$, correspondente a $y=0$. Assim, o pequenissimo intervallo horizontal de $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ a 1 exige aqu uma apreciação especial, porque nelle ha quatro ordenadas, ao passo que ha sómente duas para todo o resto indefinido da curva. Considerando, para mais clareza,

esta curva como nascendo em A, onde encontra o seu eixo, far-se-hr preciso conceber o ponto descrevente avançando a principio para o eixo vertical até B, do qual em seguida afasta-se ao infinito, conforme a fig. 68. A' medida que x augmenta, o valor do radical parcial tende a confundir-se com $x^2\sqrt{2}$, o que indica, em torno do centro, duas asymptotas rectilineas, cujo coefficiente angular é $\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Bem que a existencia dellas decida sufficientemente do sentido da curvatura na maior parte do logar, é todavia indispensavel o exame da tangente, sobretudo para a parte BAB'. Ora, aqui tem-se



(*Fig. 68*)

$$\text{tang } \alpha = \frac{x(x^2+y^2)}{y(y^2-x^2)};$$

portanto a tangente é vertical em A, onde $y=0$, e em B, onde $y=x$; de sorte que no intervallo existe um inflexão, cujo calculo seria aliás penosissimo. Referindo tudo a x, vem

$$\text{tang } \alpha = \frac{x(2x^2+\sqrt{2x^4-1})}{\sqrt{2x^4-1}\sqrt{x^2+\sqrt{2x^4-1}}}.$$

Dividindo-se os dous termos por x^3, afim de suppor x infinito, esta formula torna-se

$$\text{tang } \alpha = \frac{2+\sqrt{2-\frac{1}{x^4}}}{\sqrt{2-\frac{1}{x^4}}\sqrt{1+\sqrt{2-\frac{1}{x^4}}}},$$

cujo valor extremo é

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}},$$

o que reproduz, sob uma outra forma, a direcção já achada para a asymptota, cujo coefficiente linear seria demais reconhecido nullo completando-se a operação, quando mesmo a symetria não tivesse sido indicada d'ante-mão. Quanto ao ponto mais proximo do cen-

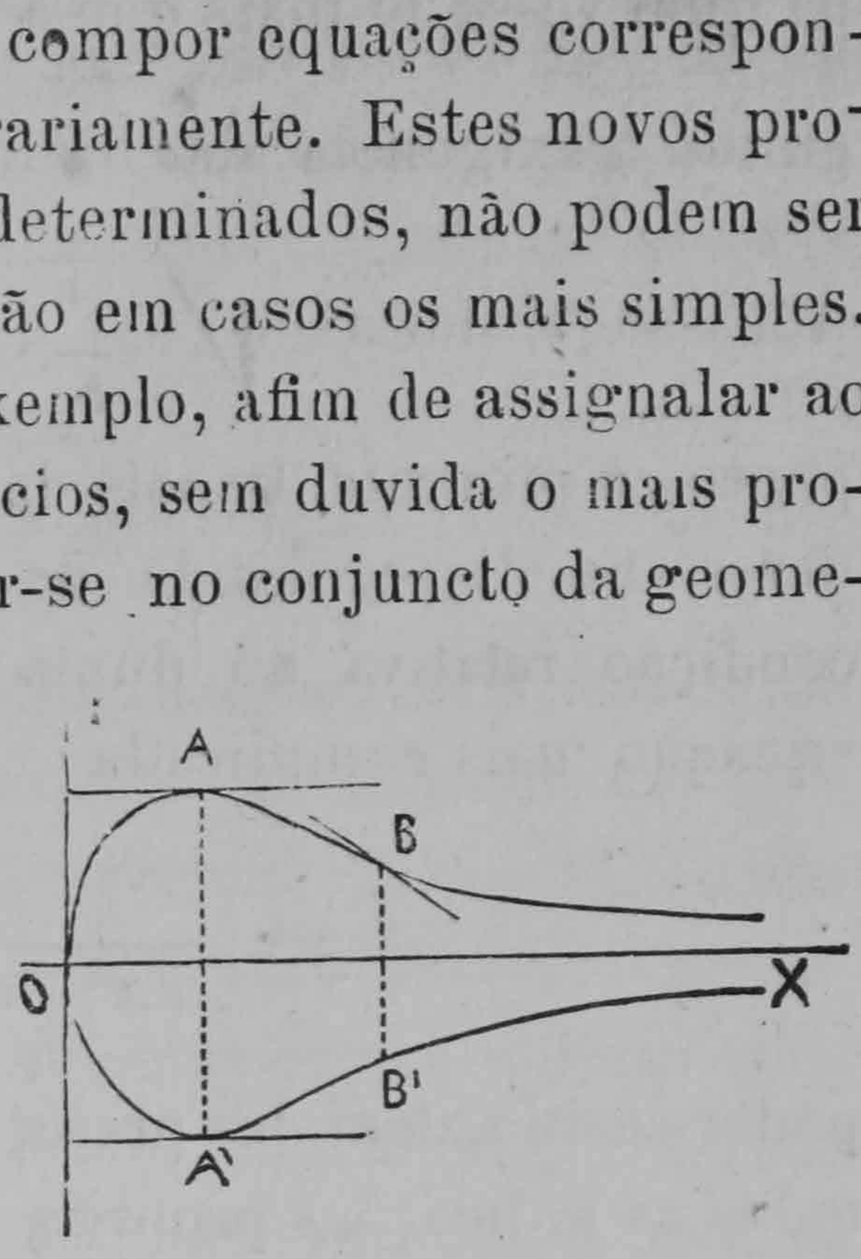
tro, o principio das normaes dará a condição $\frac{x}{y}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{x}{y}$, que evidentemente não admitte outra condição além de $y=0$, ou o vertice A, a partir do qual a curva afasta-se, pois, continuamente do seu centro, mesmo na parte AB em que ella se dirige para o eixo vertical: com effeito, é facil verificar que a distancia OB é um pouco maior do que OA.

Este exemplo extremo é proprio para fazer sentir a necessidade de algumas vezes prestar-se especial attenção a pequenos intervallos, para discutir convenientemente certas equações. Aqui os principaes accidentes geometricos passam-se entre A e B; d'ahi em diante a curvatura é evidentemente mui fraca, pois que a direcção da tangente não varia de 45° em todo o resto indefinido da curva. Todavia sente-se que a existencia de taes intervallos é sempre indicada por uma judiciosa apreciação da formula que exprime a ordenada; de sorte que, em geral, semelhantes casos de nenhum modo autorisam a contrahir habitos cegamente minuciosos que, hoje, muitissimas vezes oppoem-se a toda sã discussão das curvas algebricas.

Seria superfluo examinar geometricamente maior numero de equações polynomias; eu deixo ao leitor a multiplicação espontanea dos exemplos, aos quaes cada um poderá agora applicar sem difficuldade os principios que desde então temos assás caracterisado. Para evitar os obstaculos algebricos demasiado superiores á instrucção analytica exigida neste tratado, tenho considerado exclusivamente equações de facil resolução, ao menos quanto a uma das variaveis. Mas, depois de se ter estudado a alta algebra, convirá proseguir, com alguns exemplos bem escolhidos, a discussão geometrica das equações algebricas, sem nellas desembaraçar nenhuma coordenada. Recommendarei especialmente a este respeito a curva notavel que Descartes tirou da equação $y^3+3xy+x^3=0$. Basta um pequenissimo numero de casos analogos nos graus superiores para caracterisar sufficientemente as novas difficuldades geometricas que então resultam de nossa impotencia algebrica, evitando-se ainda com cuidado suscitar, neste assumpto, calculos por demais complicados, cuja fastidiosa influencia muito alteraria a principal utilidade logica de taes exercicios.

86.—Quando a geometria comparada, até hoje apenas entrevista por alguns espiritos philosophicos, se tiver racionalmente

constituido segundo seus verdadeiros principios, poder-se-ha tornar muito mais aproveitavel a discussão geometrica das equações, introduzindo habitualmente as questões inversas, hoje mui pouco accessiveis, as quaes consistem em compor equações correspondentes a formas geraes dadas arbitrariamente. Estes novos problemas, sempre profundamente indeterminados, não podem ser agora abordados com algum exito sinão em casos os mais simples. Creio entretanto dever indicar um exemplo, afim de assignalar ao leitor intel igente o genero de exercicios, sem duvida o mais proprio a fazer promptamente aprofundar-se no conjuncto da geometria analytica. Supponhamos que se trate de compor uma equação algebrica cujo logar possa assemelhar se á curva da figura 69. Concebendo-se a origem collocada no vertice O e o eixo das abscissas confundido com o eixo da curva, será facil formar a equação de maneira a satisfazer as condições de symetria e de asymptotismo, dando-lhe a forma $y^2 = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, com tanto que o numerador se annulle com x e que o denominador, tornando-se infinito para $x = \infty$, seja de mais alto grau, devendo a iás a fracção conservar sempre o signal da abscissa. Todas estas indicações seriam simultaneamente prehenchidas, por exemplo, com a formula



(*Fig. 69*)

$$y^2 = \frac{ax}{bx^2 + c};$$

em que os tres coefficientes, embora suppostos positivos, ficam ainda indeterminados. Por fim, uma tal funcção certificará a existencia de um ponto culminante, analogo a A, e, desde então, a de uma inflexão entre A e a asymptota. Assim, as diversas condições essenciaes da figura estão ao mesmo tempo satisfeitas por esta equação, em que a disponibilidade das constantes a, b, c permittirá agora prehencher as indicações numericas relativas á posição e altura do ponto culminante. De facto, a indeterminação destes coefficientes não impede de applicar-se aqui a regra das tangentes, que dará a expressão

$$\text{tang } \alpha = \frac{a(c-bx^2)}{2(bx^2+c)\sqrt{ax(bx^2+c)}},$$

na qual vê-se de mais que a origem é, com effeito, um vertice, segundo a exigencia da figura, e como já o indi ava a relação $\frac{y}{x}$.

Acha-se assím $x=\sqrt{\frac{c}{b}}$, $y=\sqrt[4]{\frac{a^2}{4bc}}$, para as coordenadas do ponto cu minante. Depois de o ter collocado convenientemente, poder-se-ha dispor ainda de uma constante em favor de uma só condição relativa ao dupl'o ponto de inflexão. Si se adoptasse a equação mais complicada

$$y^4 = \frac{ax^3}{bx^4+cx^3+dx^2+ex+f},$$

poder-se-hia,além das prescripções precedentes, satisfazer tambem todas as indicações proprias á inflexão B, B', quer quanto ás suas coordenadas, quer quanto á tangente correspondente : uma destas novas constantes ficaria mesmo disponivel para alguma outra intenção geometrica.

CAPITULO V

DISCUSSÃO ESPECIAL DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU.

87.—Depois de ter caracterisado sufficientemente,nos capitulos anteriores, a discussão geral das equações algebricas, é mister agora completar este estudo, indicando com especialidade, por um exemplo conveniente, a maneira de apreciar todos os casos geometricos que podem ser apresentados por um genero particular de equações, segundo as diversas hypotheses relativas aos coefficientes indeterminados que ahi se achem. Tal é o principal objecto da discussão especial a que vamos submetter as equações do segundo grau, e que além disso formará, para o conjuncto deste tratado, uma transição natural desta terceira á quarta parte, onde devemos estudar particularmente as curvas deste grau.

Ainda que semelhante analyse tenha sido tambem operada por Newton para com o terceiro grau, e mesmo por Euler em relação ao quarto, estes dois casos conduzem a distincções tão complicadas e sobretudo tão numerosas, que não convem introduzil-as, para esse fim, no ensino elementar, em que o segundo grau constitue; sob esta relação, um typo mui sufficiente e completamente apreciavel, que outro inconveniente não teria além do de dar mui fraca idéa das difficuldades proprias a este exame complementar, si d'ante-mão não fosse facilmente explicavel a sua excepcional facilidade.

Por natureza, esta apreciação especial seria muito pouco propria a manisfestar, segundo um uso escolastico v cioso, os verdadeiros principios geraes da dis ussão geometrica das equações; porque as particularidades relativas a este grau removem espontaneamente quasi todos os obstaculos essenciaes que acima offereceram-nos as outras equações algebricas. Mas, tendo ja aprendido, por exemplos convenientes,a vencer estas difficuldades fundamentaes, poderemos agora, sem nenhum escrupulo. utilisar plenamente estas simplificações excepcionaes, cuja introducção judiciosa, longe de comprometter um estudo geral assás caracterisado d'ora em diante, ao contrario deve assim reagir sobre - seu aperfeiçoamento total, indicando o feliz emprego das circumº stancias particulares que tinham devido ser evitadas precedentemente.

88.—A fim de que o numero dos coefficientes da equação geral do segundo grau se ache exactamente conforme com as condiçòes da determinação, supporei sempre um delles igual á unidade, fazendo todavia cahir esta particularidade sobre o termo menos importante, para diminuir o mais possivel o inconveniente de não se poder assim representar immediatamente o caso em que falte este termo, inconveniente aliás muito menos grave do que uma falsa insinuação habitual sobre o numero de pontos determinante. Sendo, pois, a equação.

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=1,$$

a expressão da ordenada é

$$y=-\frac{bx+d}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2+4a)}$$

Aqui vê-se desde logo, como em muitos casos anteriores, que a parte racional indica um diametro rectilineo para as cordas parallelas ao eixo dos y. Agora, porém, adquire esta indicação preliminar muito mais importancia do que em outro qualquer exemplo, si reflectirmos que ella corresponde á mais geral equação deste grau, ao passo que até aqui só tem-se manifestado para com typos algebricos mui particulares relativamente aos graus respectivos. Não podendo uma tal equação experimentar nenhuma mudança de forma em virtude de qualquer deslocação do logar, que n'ella apenas produziria novos coefficientes, segue-se que, no fundo, deve esta propriedade geral convir então a todo os systemas de cordas, pois que sempre se poderá suppor que as ordenadas lhes sejam parallelas por um sufficiente giro dos eixos. Descobre-se assim, desde o começo, independentemente de qualquer theoria dos diametros, talvez o mais notavel caracter que, no conjuncto da geometria comparada, deva distinguir as curvas do segundo grau, como tendo em todos os sentidos diametros rectilineos. Por um raciocinio inverso convenientemente aprofundado, poderia demais o leitor convencer-se de que, com effeito, tal propriedade é plenamente caracteristica em quanto exclusivamente relativa a estas curvas.

Estando assim a discussão geral da ordenada, ainda mais fundamental neste caso do que em qualquer outro reduzida ao exame unico do radical, que indica a distancia vertical da curva ao diametro, somos para logo conduzidos a distinguir aqui duas hypotheses necessariamente differentes, primeiro analyticamente e depois geometricamente, conforme affecte o radical uma funcção de grau impar ou de grau par, isto é, segundo seja nulla ou não a constante composta b^2-4ac. Na primeira supposição, a curva encontrará esse diametro uma unica vez, e por conseguinte todos os outros, pois que, como acima, deve no fundo esta observação convir, em virtude da generalidade da equação actual, a um diametro qualquer; na segunda, ao contrario, o diametro encontrará a curva duas vezes e nunca mais de duas. E' claro, *a priori*, que a marcha geral da ordenada não poderia ser a mesma n stes dous casos. Comecemos considerando o primeiro, em que tem-se

$$y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{2(bd-2ae)x+(d^2+4a)}.$$

Devendo então o unico termo variavel do radical mudar de signal ao mesmo tempo que x, esta funcção será sempre real de um lado do ponto de encontro da curva com o diametro, e sempre imaginaria do outro lado, segundo o signal do coefficiente $bd—2ae$: na parte real o seu valor crescerá indefinidamente afastando-se de-te ponto. Assim, este primeiro caso corresponde a um logar de um lado limitado no sentido horizontal e illimitado do outro, sem nenhum limite parallelo ao diametro. Designal-o-hemos em breve com o nome de *parabola*, já empregado, desde o segundo capitulo desta obra, em uma curva que evidentemente pertence a este typo; aliás dentro em pouco demonstraremos pelo meio ordinario, o da coincidencia das equaçòes, que, reciprocamente, toda curva do segundo grau limitada n'um sentido e indefinida no outro, constitue de facto uma parabola propriamente dita, gerada por um ponto sempre equidistante de um ponto fixo e de uma recta fixa.

Supponhamos agora que seja do segundo grau a funcção sob o radical, e, para facilitar a discussão, imaginemos que esteja decomposta, como em diversos casos anteriores, em dous factores do primeiro grau. Ter-se-hia então

$$y = -\frac{bx+d}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)(x-x')(x-x'')},$$

designando x' e x'' as raizes correspondentes á annullação do radical, e, por conseguinte, caracterisando as duas intersecções da curva com o diametro. Aqui surge evidentemente a necessidade de uma nova distincâão, a saber, si é positivo ou negativo o factor constante $b^2—4ac$, o que, obrigando os dous factores variaveis a serem ora contrarios ora conformes pelo signal, deve necessariamente affectar muito a marcha geral da ordenada. No primeiro destes novos casos, certamente estará a curva comprehendida entre as ordenadas dos pontos em que encontra o diametro, e é demais continua, pois que todo o valor do x inferior a x'' e maior que x' tornará y real. Além disso, o seu afastamento do diametro será inevitavelmente limitado, e o *maximum* do produto $(x—x')(x''—x)$, que o determina, corresponderá ao meio dessas duas intersecções, segundo um theorema familiar d'algebra elementar relativo aos productos cujos factores dão uma somma constante. Ass m, a curva é então encerrada n'um parallelogrammo formado por duas ordenadas e duas parallelas ao diametro: nós a

alificaremos de *ellipse*, com a condição de abaixo justificarmos a perfeita conveniencia desta denominação, conformando a equação actual com o typo que este nome recorda.

Em fim, quando b^2-4ac é positivo, a marcha geral do radical torna-se essencialmente inversa da precedente, pois qne a ordenada nunca será real entre $x=x'$ e $x=x''$, e, ao contrario, sel-o-ha sempre aquem de uma das intersecções e além da outra; demais a curva poderá agora afastar-se ao infinito do seu diametro. Este logar será, pois, a um tempo illimitado em todos os sentidos e discontínuo, como a *hyperbole* propriamente dita, cujo nome desde já applicar-lhe-hemos, nome que em breve havemos de reconhecer como rigorosamente conveniente.

Taes são as distincções successivas,segundo as quaes a discussão fundamental da ordenada demonstra naturalmente que toda equação do segundo grau representa geometricamente uma parabola, uma ellipse ou uma hyperbole, conforme seja nulla, negativa ou positiva a constante composta b^2-4ac. Deve, pois, este caracter analytico persistir sempre,quando a curva se desloque arbitrariamente, embora possam então mudar os coefficientes a, b, c. Importa observar, desde a origem, que o primeiro caso se apresenta, de um modo espontaneo, como mais distincto dos dous outros do que estes o são entre si. Esta comparação será confirmada na quarta parte deste tratado pelo conjuncto das propriedades destas tres curvas.

Basta aqui a consideração do grau, independentemente de todo exame da tangente, para determinar o sentido da curvatura, indicando que o logar deve ser sempre concavo para o diametro, afim de nunca apresentar mais de dous pontos em linha recta.

89.—Completemos agora esta apreciação fundamental, considerando successivamente as equações do segundo grau sob os diversos aspectos geraes proprios ás theorias geometricas que temos estabelecido.

Quanto ao numero de pontos determinante, sustenta-se evidentemente a nossa principal distincção, indicando que a determinação da ellipse ou da hyperbole exige cinco pontos, ao passo que bastam quatro para a parabola, pois que uma das constantes arbitrarias a, b, c, pode então desapparecer da equação, em virtude da sua especial subordinação ás outras duas.

Re ativamente ás tangentes, tem-se aqui

$$\text{tang } \alpha = -\frac{by+2cx+e}{2ay+bx+d};$$

mas a discussão desta formula, actualmente inutil para discernir o sentido da curvatura, só apresenta algum interesse em relação aos pontos proprios a annullar o seu numerador ou denominador, indicando as tangentes parallelas aos eixos. Ainda o resultado poderia mesmo ser previsto com facilidade ; porque, as tangentes verticaes, por exemplo, correspondem a $2ay+bx+d=0$, o que constitue precisamente a equação do diametro relativo a cordas verticaes. Segue-se portanto que, no seu encontro com a curva, a tangente é parallela ás cordas. Esta observação, de igual modo conveniente ao numerador, pode ser facilmente estendida a um diametro qualquer por meio da luminosa consideração, que já empregamos, sobre a generalidade geometrica da equação actual. Ora, assim ampliada, esta relação constante das tangentes para as cordas constitue, sob um outro aspecto, uma consequencia necessaria da direcção da curvatura, indicada pelo grau; pois que, no ponto em que o logar corta o diametro, não poderia a tangente deixar de ser parallela ás cordas correspondentes, a menos que ahi houvesse reversão, o que é evidentemeute impossivel.

Applicando-se aqui qualquer dos nossos dous methodos geraes para a determinação das asymptotas rectilineas, ou mesmo o methodo subsidiario, por meio da extracção da raiz, achar-se-ha sem difficuldade a dupla equação

$$y=\left(-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\right)x+\left(\frac{bd-2ae}{\pm 2a\sqrt{b^2-4ac}}-d\right).$$

Os dous coefficientes são imaginarios quando b^2-4ac é negativo, como geometricamente o exigia o caso. São reaes, mas incompativeis, si $b^2-4ac=0$, de sorte que a parabola não tem asymptota; não obstante, sendo então a curva indefinida, o valor do coefficiente angular ahi indica, de accordo com os nossos principios geraes, o limite constante da direcção das tangentes. A unidade de um tal limite mostra que os dous ramos da curva, em torno de cada diametro, tendem a tornar-se parallelos entre si á medida que delle se afastam. Deve-se, alem disso, observar que esta direcção commum é precisamente a do diametro já obtido por meio do coeffi-

ciente angular, $-\frac{b}{2a}$, igualmente conveniente aos dous casos. Mas esta relação podia ser facilmente prevista, pois que então os diametros encontram a curva uma só vez, o que aqui é o caracter, em um ponto qualquer, das rectas parallelas ao limite da direcção das tangentes. Tal aproximação leva, pois, a pensar que todos os diametros da parabola devem ser parallelos entre si, como depois verificaremos.

Quanto á hyperbole, a equação precedente indica evidentemente duas asymptotas sempre distinctas, cuja intersecção corresponderia ás coordenadas,

$$x = \frac{2ae-bd}{b^2-4ac}, \qquad y = \frac{2cd-be}{b^2-4ac},$$

que em breve veremos convirem ao centro, de accordo com as exigencias geometricas, que não poderiam permittir collocar-se em outra parte um tal encontro. Esta diversidade de limite entre as direcções das duas partes da hyperbole separadas por cada diametro interior, constitue a principal diversidade graphica propria a impedir que jamais se confunda o aspecto de uma parabola com o de uma semi-hyperbole, por grosseiro que possa ser o seu traçado, desde que seja judicioso.

Si agora considerarmos as curvas do segundo grau relativamente aos diametros, com facilidade se achará, empregando o nosso segundo methodo, a equação geral

$$y = -\frac{bm+2c}{2am+b}x - \frac{dm+e}{2am+b},$$

que indica em todos os sentidos diametros rectilineos. Mas esta commum propriedade essencial tinha sido acima prevista, independentemente da theoria dos diametros. Tambem já reeonhecemos o parallelismo ne essario dos diametros da parabola, que esta equação facilmente confirma, observando que segundo a relação $b^2=4ac$, o coefficiente augular do diametro torna-se independente do coefficiente m das cordas correspondentes. Quanto á ellipse ou á hyperbole, poder-se-hia assim verificar a convergencia de todos os diametros em um ponto unico; será ella, porém, melhor annunciada em seguida pela determinação do centro. O mais feliz uso que aqui se possa fazer da equação procedente, consiste em empre-

gal-a especialmente em vista da natureza recilinea de todos os diametros, para achar os *eixos* da curva, evitando a indeterminada transposição de eixos exigida em qualquer outro caso por esta investigação, segundo as nossas explicações geraes. Basta, com effeito, dispor de m afim de que o diametro torne-se perpendicular ás suas cordas, conforme a condição ordinaria

$$m = \frac{2am+b}{cbm+2}, \quad \text{ou} \quad m^2+2\frac{c-a}{b}m-1=0,$$

que indica duas direcções rectangulares constantemente possiveis, e d'onde resultam as duas rectas em torno das quaes deve ser symetrica toda curva do segundo grau. Entretanto, acabando o calculo, notar-se-ha que no caso parabolico é inadmissivel um destes valores, como tornando infinito o coefficiente inear do diametro correspondente; de modo que a parabola só é symetrica em um sentido, como o exigia evidentemente a sua figura geral. Pode-se igualmente constatar assim que a ell pse é encontrada por seus dous eixos, e a hyperbo e por um sómente, conforme as condições geometricas de continuidade ou descontinuidade.

O methodo dos centros conduziria aqui ás coordenadas acima referidas, que são sempre reaes e, demais, finitas para a ellipse ou para a hyperbole. Tornando-se infinitas para a parabola, confirmam nella a ausencia do centro já indicada pela figura geral, e verificam ao mesmo tempo o parallelismo precedentemente reconhecido entre todos os seus diametros.

Em fim, si applicarmos a duas curvas quaesquer do segundo grau,

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=1$$

e

$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x=1,$$

a nossa theoria geral da semelhança, é mister, na primeira equação, substituir

$$x'\cos X'-y'\operatorname{sen}X'+\alpha \quad \text{e} \quad x'\operatorname{sen}X'+y'\cos X'+\beta$$

em logar de x e de y, para identifical-a com a segunda, na qual d'ante-mão se tivesse mudado x em mx' e y em ny'. Mas, sem que seja necessario executar este longo calculo, vê-se logo que conduzirá a uma única relação, como desde muito temos notado·

Isto posto, a busca desta unica condição de semelhança poderá, segundo os principios geraes, effectuar-se directamente sob diversas formas equivalentes, quer lineares, quer angulares, das quaes a mais conveniente me parece ser aqui relativa á igualdade de inclinação das duas asymptotas que, para com cada logar, constituem de certo duas linhas homologas. A equação acima mencionada dá para um tal angulo a formula tang $V = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a+c}$: assim, a condição de semelhança é

$$(b^2-4ac)(a'+c')^2-(b'^2-4a'c')(a+c)^2=0.$$

Ella torna-se constantemente identica no caso parabolico, de maneira que duas parabolas são necessariamente sempre semelhantes. A semelhança espontanea de dous circulos verifica-se com igual facilidade, em vista do duplo caracter correspondente.

Com quanto pareça particular á hyperbole a consideração de que tão commodamente deriva esta condição, deve o resultado ser estendido, sem nenhum escrupulo razoavel, aos outros dous casos, pois que o que se tinha primeiro em vista não se distingue por nenhuma relação precisa tendente a restringir a generalidade da equação. Mesmo para as equações ellypticas, em que tornam-se imaginar os os coefficientes angulares das duas rectas consideradas, si se interpretam estes coefficientes mudando o signal do radical commum, o que não poderia alterar a relação final, dar-se-ha nascimento a duas rectas que, por então não serem mais asymptotas, nem por isso deixarão de constituir sempre, para as duas curvas, linhas sem duvida homologas, cuja verdadeira destinação geometrica, indifferente a uma tal apreciação, será demais explicada ulteriormente.

90.—Para completar a discussão especial das equações do segundo grau, falta considerarmos os diversos casos singulares, espontaneamente evitados acima, nos quaes, bem que offerecendo o caracter analytico de uma das linhas precedentemente examinadas, realmente nenhuma curva representam. Esta apreciação complementar é aqui tanto mais interessante, quanto poderá indicar as anomalias relativas a todas as outras equações algebricas, sobre as quaes não tinhamos antes podido de modo algum esboçar um tal exame.

Encaremos em primeiro logar as equações parabolicas, nas quaes, annullando-se b^2-4ac, a ordenada é expressa pela formula

$$y=-\frac{bx+d}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{2(bd-2ae)x+(d^2+4a)}.$$

Emquanto não é nullo $bd-2ae$, resulta dahi uma parabola, segundo a nossa discussão fundamental. Os casos excepcionaes devem, pois, referir-se á annullação desta segunda funcção dos coefficientes, donde resulta, com effeito, uma formula do primeiro grau,

$$y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{d^2+4a},$$

que nunca poderia convir uma curva, e que indicará duas rectas parallelas, ou uma so recta, ou a ausencia total de logar geometrico, segundo fôr a con tante composta d^2+4a positiva, nulla ou negativa. A estes tres casos singulares correspondem, para a equação primitiva, as formas

$$(y+px+q)^2-r^2=0, \quad (y+px+q)^2=0, \quad (y+px+q)^2+r^2=0,$$

que são directamente caracteristicas, como recordando a decomposição esppontanea do primeiro membro da equação em dous factores do primeiro grau, cujos termos variaveis coincidem, e os constantes ora são desiguaes, ora iguaes, ora imaginarios. Evidentemente todos os graus comportariam, por semelhantes motivos analyticos, excepções analogas, salvo as modificações mais variadas relativas ao numero dos factores.

Nas equações ellipticas, onde b^2-4ac é negativo, temos discutido a formula

$$y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)(x-x')(x-x'')}$$

quando as duas raizes auxiliares x' e x'' são reaes e desiguaes, isto é, quando o polynomio

$$a(ae^2+cd^2-bde+4ac-b^2),$$

formado do conjuncto dos coefficientes, é positivo: é o caso nor-

mal da ellipse. Supponhamos, pois, agora que esta condição não seja prehenchida, e que primeiro essas duas constantes tornem-se iguaes em virtude da annullação deste polynomio. Ter-se-ha então

$$y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{x-x'}{2a}\sqrt{b^2-4ac},$$

e a equação não comportará outra solução real alem da relativa a $x=x'$ que faz desapparecer o radical imaginario, de sorte que o logar geometrico reduzir-se-ha ao unico ponto

$$x=x',\ y=-\frac{bx'+d}{2a},\ \text{ou}\ x=\frac{2ae-bd}{b^2-4ac},\ y=\frac{2cd-be}{b^2-4ac}.$$

Segundo as explicações fundamentaes postas no começo deste tratado, seria mais exacto considerar a equação como não podendo ser sufficientemente representada, em consequencia da falta de pintura das soluções imaginarias. De facto, este ponto unico poderá alem disso conservar a mesma posição n'uma infinidade de hypotheses differentes sobre os coefficientes a, b, c, d, e. assim sujeitos sómente a tres relações para cada situação dada desse pretendido logar. Remontando á composição correspondente da equação primitiva, chega-se á forma

$$(y+px+q)^2+(y+p'x+q')^2=0,$$

que limita directamente as soluções reaes no unico ponto commum ás duas rectas $y+px+q=0$ e $y+p'x+q'=0$.

Nada de semelhante poderia ter logar em nenhum grau impar, conforme a noção algebrica relativa á existencia necessaria de uma raiz real em toda a equação de grau impar a uma só incognita. Mas todos os graus pares comportarão accidentes analogos, e com mais variedade, segundo o typo geral

$$[f(x,\ y)]^{2m}+[\varphi(x,\ y)]^{2n}=0$$

que, manifestando a impossibilidade de destruir um pelo outro dous grupos sempre positivos, indicará como unicas soluções reaes as coordenadas communs ás duas linhas $f(x,y)=0$ e $\varphi(x,y)=0$. No segundo grau, em que estas linhas devem ser rectas, não pode resultar sinão um ponto unico. Em um grau mais elevado, em que ellas poderão tornar-se curvas, estes pontos isolados poderão

multiplicar-se mais, até um limite sempre determinado pelo numero das intersecções possiveis. Assim, por exemplo, uma equação do quarto grau poderia não fornecer geometricamente mais de um só ponto, ou então dar dous, tres e mesmo quatro, segundo as relações das duas curvas, $f(x, y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, então do segundo grau e podendo offerecer até quatro pontos communs sem se confundirem.

Podemos em seguida suppôr que, n'uma equação elliptica, as constantes auxiliares x' e x'' sejam imaginarias, istó é, que o polynomio $a(ae^2+cd^2-bde+4ac-b^2)$, positivo para o caso normal, torne-se negativo. Retomando a formula

$$y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)(x-x')(x-x'')},$$

sabe-se, pela theoria geral das equações do segundo grau, que a funcção $(x-x')(x-x'')$ fica então constantemente positiva, qualquer que possa ser o valor de x. Portanto, sendo negativo b^2-4ac, vê-se que agora a ordenada será sempre imaginaria, de sorte que a equação não terá mais nenhum logar geometrico, mas segundo um modo analytico de todo differente do seguido nas equações parabolicas a ima sujeitas á mesma anomalia. Este caso, geometricamente excepcional, poderá ser, sob o ponto de vista algebrico, tão frequente como o caso normal, tomando-se coefficientes ao acaso, pois que não exige entre estes nenhuma relação precisa, e só destingue-se pelo sentido de uma certa desigualdade, sentido imprevisto a principio. A composição correspondente da equação primitiva é claramente representada pela formula

$$(y+px+q)^2+(y+p'x+q')^2+k^2=0;$$

que mostra directamente a impossibilidade de solução real, quando mesmo annullem-se as duas partes variaveis.

Evidentemente todas as equações de grau par compertariam semelhante anomalia geometrica, segundo o typo

$$[f(x, y)]^{2m}+[\varphi(x, y)]^{2n'}+[\psi(x,y)]^{2p}+\ldots\ldots+k^2=0.$$

Consideremos em fim os casos singulares proprios ás equações hyperbolicas, nas quaes b^2-4ac é positivo. Segundo a mesma formula,

$$y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)(x-x')(x-x'')},$$

já reconhecemos a hyperbole quando as constantes x' e x'' são reaes e desiguaes. Supponhamol-as agora iguaes, de accordo com a hypothese $a(ae^2+cd^2-bde+4ac-b^2)=0$. Como acima, a formula torna-se

$$y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{x-x'}{2a}\sqrt{b^2-4ac}.$$

Mas a mudança de signal de b^2-4ac produz um effeito geometrico muito differente, bem que igualmente singular, porque então a ordenada é, ao contrario, sempre real, de sorte que a equação admitte ainda um verdadeiro logar, ao mesmo tempo contínuo e indefinido. Consiste, pois, aqui a anomalia em, cessando este logar de ser curvilineo, compor-se de duas rectas que concorrem necessariamente ao ponto cuja abscissa é x'. Remontando ao estado correspondente da equação primitiva, reconhece-se a forma

$$[y+px+q]^2-[x+p'y+q']^2=0,$$

que indica uma decomposição excepcional em dous factores do primeiro grau, relativos a duas rectas não parallelas. Todos os outros graus, pares ou impares, seriam evidentemente susceptiveis de accidentes analogos.

Si as constantes x' e x'' tornam-se imaginarias, suppondo-se negativo o polynomio $a[ae^2+cd^2-bde+4ac-b^2]$, é facil reconhecer que de modo nenhum este caso é singular em relação ás equações hyperbolicas, com quanto tivesse devido sel-o para as ellipticas. Na verdade, a invariabilidade do signal da funcção posta sob o radical de y constitue então a ordenada em constante estado de realidade, de maneira a fazer igualmente nascer uma curva indefinida. Poder-se-hia somente temer a principio que este logar não cessasse aqui de ser descontinuo, pois que a interrupção horizontal primitivamente verificada entre $x=x'$ e $x=x''$, assim desapparece necessariamente. Basta, porém, pensar na significação geometrica das constantes x' e x'', para reconhecer que esta diversidade não indica realmente modificação a guma de forma, e é apenas attinente a um simples accidente de situação. Com effeito, determinando estas raizes as intersecções da curva com o diametro

correspondente ás cordas verticaes, a sua generalidade actual mostra que este diametro, e, por conseguinte, suas parallelas mais proximas cessam de encontrar o logar, cuja discontinuidade se acha então segundo as perpendiculares a essa recta. Não existe, pois, geometricamente nenhuma differença effectiva entre este caso é o que nos serviu de typo fundamental. Vê-se que toda a diversidade consiste em que a curva córte ou não um certo diametro. Como a forma geral da hyperbole indica evidentemente que, do centro collocado na concavidade, partem indifferentemente diametros proprios a encontrar a curva e outros que não poderiam attingil-a, segundo as direcções das cordas correspondentes, é claro que esta distincção fica puramente relativa á situação da hyperbole em relação aos eixos actuaes. Assim, este terceiro caso das equações hyperbolicas não é realmente mais singular que o primeiro. A distincção delles é tão insignificante que facilmente poderão coexistir, comparando-se os dous modos de resolução da equação, na qual x e y podem ser alternativamente desembaraçadas. A razão é que, na formula analoga

$$x = -\frac{by+e}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(b^2-4ac)(y-y')(y-y'')},$$

é facil verificar que o polynomio, de que depende a realidade ou a imaginariedade das novas variaveis auxiliares y' e y'', não differe do que consideramos em relação a x' e x'' sinão pela mudança do factor monomio a em c, nenhuma modificação soffrendo o factor complexo. Ora, a e c poderiam aqui ser oppostos pelo signal, de sorte que a imaginariedade de um dos pares coincidiria com a realidade do outro, ao passo que, si a equação fosse elliptica, a e c teriam necessariamente o mesmo signal, e estas duas hypotheses não poderiam coexistir, como o exige d'ante-mão sua incompatilidade geometrica.

Resumindo o conjuncto desta discussão complementar, vê-se que, segundo caracteres determinados: 1º as equações parabolicas comportam tres anomalias distinctas, em que representam duas rectas parallelas, ou então uma só recta, ou em fim não admittem logar algum; 2º as equações ellipticas offerecem dous casos singulares conforme o logar se reduza a um só ponto ou desappareça de todo; 3º em fim, as equações hyperbolicas só apresentam uma

excepção geometrica, na qual o logar degenera em duas rectas convergentes.

91.—Apenas resta-nos agora considerar as equações do segundo grau sob um ultimo aspecto geral, estudando nellas as simplificações que podem resultar de uma feliz escolha dos eixos rectangulares. Necessariamente mais pronunciadas do que em nenhum outro caso, como já indiquei em principio (30), constituirão demais estas reducções a preparação immediata da elaboração especial, a que deve ser consagrada a quarta parte deste tratado, em relação ás tres curvas caracterisadas neste capitulo.

Para melhor apreciar estas modificações analyticas, é mister dividil-as em duas classes: uma, relativa á deslocação dos eixos rectangulares em torno de uma mesma origem qualquer, é essencialmente commum a todos os casos; a outra, que se refere á simples mudança de origem, produzirá effeitos distinctos segundo for a equação parabolica ou não.

A primeira simplificação, que é evidentemente a mais importante como affectando os termos do mais a to grau, deve sobretudo consistir em separar as variaveis. Alem de ser o termo em que ellas coexistem de ordinario o mais embaraçoso, poderá elle desapparecer sem que a equação cesse de representar indifferentemente as tres curvas; ao passo que, si faltasse um dos quadrados, sendo desde então b^2-4ac sempre positivo, a equação não poderia nunca ser sinão hyperbolica. Substituamos, pois, em logar de x e y, na equação geral

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=1,$$

as formulas

$$x=x'\cos X'-y'\mathrm{sen}X', \quad y=x'\mathrm{sen}X'+y'\cos X',$$

afim de dispor do angulo X' de maneira a anullar o coefficiente total do termo em $x'y'$. Dahi resulta a condição

$$2(a-c)\mathrm{sen}X'\cos X'+b\cos^2X'-b\mathrm{sen}^2X'=0,$$

ou, introduzindo a tangente,

$$\mathrm{tang}^2X'-2\frac{a-c}{b}\,\mathrm{tang}X'-1=0.$$

Esta equação mostra que a transformação será sempre possivel,

e que o systema rectangular, proprio a satisfazer aqui, será necessariamente unico, pois que os dous valores de tang X' convirão evidentemente a duas rectas perpendiculares entre si. Não haveria indeterminação a não ser no caso do circulo, em que o duplo caracter $b=0$, $a=c$, tornaria a equação de todo identica, conforme as exigencias geometricas. Si, sem effectuar immediatamente esta reducção, se quizesse apenas verificar a possibilidade constante, poder-se-hia conseguil-o de uma maneira menos directa, porém mais commoda, introduzindo a principio o angulo 2X', em virtude do qual a condição primitiva daria logo

$$\text{tang } 2X' = \frac{b}{c-a},$$

formula simples e facil de reter, que demais reproduziria facilmente a de tang X', segundo a regra trigonometr ca ordinaria.

A final bastaria apenas a apreciação geometrica de uma tal transformação para represental-a d'ante-mão como possivel e determinada. Na verdade, quando as variaveis estão separadas, os dous diametros que resultam immediatamente da resolução da equação em relação a y ou a x, e correspondem a cordas parallelas ás coordenadas respectivas, tornam-se necessariamente parallelos aos eixos oppostos, e desde então perpendiculares ás suas proprias cordas. Assim, os eixos rectangulares susceptiveis de tal propriedade devem ser parallelos aos eixos geometricos da curva, cuja constante existencia, pelo menos para um d'elles e a determinação unica, excepto para com o circulo, garantiam *a priori* que sempre existiria, em torno de uma origem qualquer, um só systema de eixos rectangulares susceptivel de permittir a separacão das variaveis. Sendo assim toda equação do segundo grau constantemente eductivel á forma.

$$ay^2+cx^2+dy+ex=1,$$

consideremos as simplificações ulteriores que lhe puder fazer experimentar, nos termos inferiores, uma mudança conviniente de origem, sem d'ora em diante alterar a nova direcção dos eixos. Para este effeito, importa distinguir dous casos, segundo a equação é ou não parabolica, isto é, conforme a curva tenha centr

ou não. No primeiro caso, o caracter invariavel, $b^2-4ac=0$, indica a principio que o termo em xy não pode annullar-se sem que espontaneamente deva desapparecer um dos quadrados. Portanto em relação aos novos eixos rectangulares, a equaçãə é então, por exemplo,

$$ay^2+dy+ex=1.$$

A deslocação de origem não pode ahi tender a mais que suprimir o termo do primeiro grau em y e o termo constante, afim de continuarem a coexistir as duas variaveis. Pode-se facilmente verificar, executando esta simples operação analytica, que, com effeito, uma tal reducção é sompre possivel, a menos que a ou e sejam nullos, o que não se daria sinão em um dos casos singulares apreciados no nº precedente. A interpretação geometrica claramente indica esta possibilidade permanente; pois que a desapparição do termo dy suppõe que se tenha tomado para eixo das abscissas o eixo geometrico da parabola, e a do termo constante, que a origem esteja collocada sobre a curva; de sorte que as duas condições serão ao mesmo tempo prehenchidas transportando-se a origem para o unico vertice que comporta então o logar. E' assim que toda equação parabolica do segundo grau é afinal reductivel á forma

$$y^2=mx,$$

dando aos eixos rectangulares uma direcção e posição convientes. Tal reducção constante não poderia agora deixar duvida alguma sobre a perfeita identidade da curva correspondente com a que temos especialmente qualificado de *parabola* na primeira parte deste tratado.

Quando fôr elliptica ou parabolica a equação

$$ay^2+cx^2+dy+ex=1,$$

será facil eliminar os dous termos do primeiro grau, transportando-se a origem para o centro, cuja existencia é então d'antemão reconhecida. Assim, toda equação semelhante do segundo grau pederá, em relação aos dous eixos rectangulares em torno dos quaes a curva é symetrica, tomar finalmente a fórma

$$ay^2+cx^2=1,$$

que desde então torna irrecusavel a coincidencia dos logares geometricos correspondentes com as curvas introduzidas, desde o começo de nosso estudo, sob os nomes especiaes de ellipse e hyperbole. E' o typo analytico que habitualmente devemos preferir para a theoria particular de uma ou da outra figura. Não obstante, si se desejasse conservar ás equações ellitipcas ou byperbolicas a faculdade de tornarem-se tambem parabolicas, o que, com quanto raras vezes conveniente, pode no entanto facilitar certas operações communs ás tres curvas, fôra mister, como acima. transportar a origem para o vertice, então ora quadruplo ora duplo ; isto reduziria a equacão á forma

$$y^2 = mx + nx^2,$$

que indica a parabola, a ellipse ou a hyperbole, segundo seja n nullo, negativo ou positivo.

Temos sempre snpposto até o presente que os novos eixos se conservem re tamgulares, como de ordinario o exige a simplificação do estudo geometrico, bem que esta obrigação tire a faculdade de eliminar-se mais um termo da equação. Mas, afim de completar aqui a apreciação geral das reducções que comportam as equações do segundo grau á vista de uma conveniente escolha dos eixos coordenados, importa examinar em fim as modificações mais profundas que poderia produzir a dupla disponibilidade das direcções delles, segundo as formulas

$$x = x'\cos X' + y'\cos Y', \qquad y = x'\operatorname{sen} X' + y'\operatorname{sen} Y',$$

que permittiriam annullar simultaneamente dous dos tres termos do seguudo grau.

Estes termos não poderiam ser sinão os dous quadrados, sem o que a equação seria parabolica, no qual caso uma tal reducção teria ja sido melhor effectuada com eixos rectangulares. Ora, quando os dous quadrados tiverem desapparecido, a equação apresentará necessariamente o caracter hyperbolico. Assim, tal reducção é impossivel para a ellipse, cuja equação nunca pode admittir menos de tres termos. Evidentemente, porém, convem ella á hyperbole por causa de suas asymptotas. De facto, dirigindo-se um dos eixos coordenados parallelamente a uma destas, sabe-se que a equação deve carecer do quadrado correspondente de sorte que a um tempo se eliminarão os dous quadrados, to;

mando-se, em torno de uma origem qualquer, eixos parallelos ás duas asymptotas. Facil é verificar, com effeito, executando a a substituição indicada, que as duas equações, aliás naturalmente identicas, qne determinarem os angulos X', Y' segundo esta dupla condição, assignarão ás suas tangentes valores exactamente iguaes aos acima referidos qnanto aos coefficientes angulares das asymptotas. Si, alem disso, collocar-se a origem no centro, a equação da hyperbole será em fim reductivel á forma

$$xy = m^2$$

que logo annunneia uma curva asymptotica aos dous eixos, que não seriam rectangulares sinão quando no principio se tivesse tido $c = -a$. Embora a sua obliquidade ordinaria deva oppor-se ao emprego habitual de uma tal equação, não é menos notavel que a hyperbole seja, como a parabola (mas segundo um modo analytico ou geometrico completamente diverso) susceptivel de uma equação simplesmente binomia, ao passo que a equação da ellipse deve sempre ser pelo menos trinomia. Esta differença necessaria, imperfeitamente ápreciada até hoje, conduzirá talvez um dia, na constituição racional da geometria comparada, a classificar a ellipse e a hyperbole em familias de curvas verdadeiramente distinctas, a pezar da grande analogia que vão offerecer-nos, em muitos pontos, as suas respectivas propriedades.

QUARTA PARTE

ESTUDO ESPECIAL DAS CURVAS DO SEGUNDO GRAU

92.—Não sendo, por natureza, a discussão geometrica das equações mais que um primeiro esboço fundamental do conjuncto dos attributos proprios ás curvas correspondentes, a terceira parte deste tratado acaba realmente de caracterisar a applicação combinada das nossas diversas theorias essenciaes ao estudo geral das curvas algebricas. Mas, para que nossa apreciação gradual do verdadeiro espirito da geometria analytica possa afinal adquirir toda a clareza e precisão convenientes, é mister agora especificar mais esta applicação para com algumas das curvas assim consideradas. Este fim logico será sufficientemente attingido por um estudo judicioso das principaes propriedades das tres curvas notaveis que resultam das equações do segundo grau, sem fallar na alta utilidade logica de um tal conhecimento, em vista do uso capital dessas figuras nas partes elementares da philosophia natural e sobre tudo em astronomia.

Conforme o novo plano que caracterisa esta obra, semelhante estudo nenhuma difficuldade essencial poderia offerecer, pois que nada mais temos do que applicar especialmente principios geraes plenamente estabelecidos, o que permittirá aqui abreviar muito este trabalho, embora comprehendendo mais propriedades destas tres curvas do que se tem costume de considerar. Toda a attenção do leitor deverá concentrar-se na simplificação espontanea dos nossos methodos universaes e na feliz interpretação de seos resultados particulares. E' assim que esta ultima parte da geometria plana deve, a seu modo, concorrer para desenvolver o sentimento fundamental da harmonia necessaria entre as concepções analyticas e as noções geometricas, que constitue a unidade

philosophica do nosso ensino. Sem a reacção logica que deve resultar aqui deste complemento especial, as theorias geraes, em que sobretudo consiste a geometria analytica, ficariam affectas de uma especie de uniformidade machinal, que muito importa corrigir, manifestando, sobre alguns exemplos caracteristicos, o genero de modificações que ellas devem soffrer para adaptarem-se o melhor possivel ás conveniencias de cada caso.

Por satisfactoria que seja, a este respeito, a escolha das curvas do segundo grau, é preciso reconhecer francamente uma inevitavel imperfeição historica, que consiste na falta radical de originalidade de tal applicação, pois que as principaes propriedades que vão offerecer-nos analyticamente as secções conicas foram realmente descobertas, por caminhos differentes, vinte seculos antes de ter-se podido operar esta elaboração. Esta consideração é aqui destinada sobretudo a explicar previamente a pouca espontaneidade que o leitor poderá notar em certas noções, que o modo moderno difficilmente esclareceu e a quaes teve de limitar-se, em essencia, a verificar, quando o antigo estudo destas curvas foi retomado com os methodos analyticos introduzidos pela grande renovação cartesiana. Em fim, este grave inconveniente didactico pode ser hoje sufficientemente evitado em relação aos mais importantes theoremas, que a analyse faria naturalmente descobrir, si ainda fossem ignorados. Elle só continúa verdadeirámente inevitavel para algumas proposições accessorias que, apezar de notaveis e até uteis, quasi poderiam ser afastadas sem alterar, em essencia, a principal destinação de tal estudo. Todavia, esta especie de falsa posição logica exigiria talvez, para melhor attingir-se o fim proprio desta quarta parte da geometria plana, que tambem se incluisse nella a apreciação especial de algumas curvas algebricas assás complicadas para não terem podido ser convenientemente examinadas sob o antigo regimem geometrico. Parece-me que seria sufficiente para este mister um tratado summario da cissoide, o qual aguardo-me para ajuntar a uma outra edição desta obra, si este novo systema de ensino da geometria analytica obtiver o assentimento dos professores judiciosos.

CAPITULO I

THEORIA DOS FOCOS E DAS DIRECTRIZES

93.—Antes de proceder directamente ao estudo especial de cada uma das tres curvas do segundo grau, é preciso estabelecer, sob um aspecto commum, a unica theoria nova de que ainda não tratamos, e que, sendo realmente particular a estas linhas (·), não devia, com effeito, figurar entre as theorias geraes, a que estava consagrada a segunda parte desta obra. Quando este preambulo immediato estiver convenientemente construido, a apreciação successiva das principaes propriedades da parabola, da ellipse e da hyperbole não exigirá mais que uma simples applicação judiciosa d'um conjuncto de methodos plenamente elaborados.

Ignora-se em essencia qual fosse, no estudo original das secções conicas, a verdadeira fonte das noções relativas aos focos, que deveram constituir, historicamente, uma das mais antigas descobertas sobre este assumpto e a base da maior parte das outras. A refundição analytica deste estudo fez sentir aos geometras modernos a necessidade d'um ponto de vista commum proprio a ligar entre si as idéas, até então muitissimo diversas, apresentadas, a este respeito, de um lado pela parabola, e de outro pela ellipse e pela hyperbole. Tal é o principal destino da difinição, a principio puramente algebrica, que hoje applica-se ao *foco* de uma linha do segundo grau, assim chamando um ponto tal, que a distancia que delle vai a um ponto qualquer da curva, é uma funcção racional das coordenadas variaveis deste (··). Mas, com quanto este artificio possa bastar immediatamente para proceder com uniformidade á determinação dos focos nas tres curvas, não poderia prehencher assás as condições essenciaes de uma verdadeira definição, si, segundo um uso muito ordinario, não se procurasse

---

(·) Ha qnem pretenda que os focos não são privativos das curvas do segundo grau, e que outras curvas tambem os possuem ; mas esta opinião não está ainda completamente aceita. (Nota do trad.)

(··) Esta deflnição é muitas vezes alterada por uma restricção viciosa que consiste em impor esta obrigação de racionalidade sò em relação a uma das coordenadas, o que não convem, como adiante se verá, sinão a certas equações do segundo grau : a distancia não pode ser geralmente racional sinão em funcção das duas coordenadas ao mesno tempo.

fazer convenientemente sobresahir a interpretação geometrica desse caracter analytico. Como esta correlação geral constitue o nó principal de toda a theoria dos focos, importa aqui estabelecel-a com cuidado.

Quando a fornula $\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}$, que exprime a distancia do foco procurado a um ponto qualquer do logar, se tiver tornado uma funcção racional das coordenadas variaveis, esta funcção só poderá ser do primeiro grau, para uma curva do segundo, sob a forma $px+qy+r$. Ora, tal expressão pode sempre ser encarada, sob o ponto de vista geometrico, como representando um multiplo determinado da distancia do ponto variavel a uma recta fixa $y=hx+k$. Com effeito, esta distancia seria expressa, segundo a regra do n.° 29, pela funcção $\frac{y-hx-k}{\sqrt{h^2+1}}$,

que, multiplicada por uma constante m, se tornaria exactamente identica á precedente, tomando-se

$$m=\sqrt{p^2+q^2},\quad h=-\frac{p}{q},\quad k=-\frac{r}{q};$$

de sorte que a equação da recta assim introduzida, sendo desde então $px+qy+r=0$, se formaria annullando-se a expressão racional da distancia ao foco. Em virtude da indispensavel introducção de uma tal recta, de ordinario chamada *directriz*, a definição primitiva do foco torna-se verdadeiramente geometrica e cosiste em conceber toda curva do segundo grau como o logar de um ponto que está de um ponto fixo e de uma recta tambem fixa a distancias que se conservam constantemente proporcionaes. Reciprocamente, esta noção geometrica reproduz logo o caracter analytico primordial, pois que essa propocionalidade indica evidentemente que a primeira dessas duas distancias pode-se exprimir tão racionalmente quanto a segunda.

Uma tal explicacão fundamental reduz a determinação geral dos focos e das directrizes, nas curvas do segundo grau, a pôr-se a equação do logar sob a fórma

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=px+qy+r,$$

que immediamente resulta dessa definição, d'ora em diante a um tempo analytica e geometrica. Ora, esta transformação nenhu-

ma difficuldade apresenta, concebida em sentido inverso, isto é, reduzindo-se este novo estado da equação ao modo ordinario

$$ay^2+bxy+cx^4+dy+ex=1,$$

mediante as cinco condições de coincidencia :

$$\frac{q^2-1}{\alpha^2+^2-r^2}=a, \qquad \frac{2pq}{\alpha^2+\beta^2-r^2}=b, \qquad \frac{p^2-1}{\alpha^2+\beta^2-r^2}=c,$$

$$\frac{2(\beta+qr)}{\alpha^2+\beta^2-r^2}=d, \qquad \frac{2(\alpha+pr)}{\alpha^2+\beta^2-r^2}=e,$$

as quas determinarão sufficientemente as cinco constantes desconhecidas, α, β, p, q, r, relativas ao foco e á directriz, assim como á relação $\sqrt{p^2+q^2}$ que especifica a curva proposta. A distincção primordial entre as tres curvas do segundo grau offerece symptomas equivalentes nas duas formas da equação, porquanto o coefficiente composto b^2-4ac equivale aqui a $4(p^2+q-1)$; de sorte que o logar será parabolico, el iptico ou hyperbolico, segundo fôr a relação especifica $\sqrt{p^2+q^2}$ igual, inferior on superior a unidade, comforme a discussão directa e especial do n° 23.

94.—Alem deste modo natural da dupla theoria dos focos e das directrizes, importa conceber um segundo que, embora de ordinario menos proprio ao uso effectivo, offerecerá aqui a grande vantagem logica de familiarisar desde ja o leitor com um dos mais poderosos artificios geraes da analyse mathematica, commumente reservado até hoje ás mais altas especulações geometricas e sobretudo mecanicas, conhecido com o nome de *methodo dos multiplicadores*, devido essencialmente a Lagrange.

Methodo dos multiplicadores

Considerando-se analyticamente a questão proposta como consistindo em tornar quadrado perfeito a funcção

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$

segundo a relação que a equação primitiva,

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=1,$$

estabelece entre as duas variaveis, a principal difficuldade provém de não se poder ordinariamente ter em vista esta ligação pela simples substituição de y a x ou de x a y ; pois que a condição proposta não pode, em geral, ser prehenchida sinão em

quanto a formula da distancia continúa a encerrar simultaneamente as duas variaveis, como demais terei occazião de explicar depois especialmente. Entretanto, uma tal substituição parece a principio o unico meio de tomar em consideração bastante a subordinação fundamental destas variaveis. Nesta perplexidade, torna-se indispensavel generalisar, sob este ponto de vista, as concepções habituaes, elevando-se á noção do modo analytico o mais extenso que a apreciação de semelhante dependencia possa comportar. Consiste elle aqui em ajuntar á fnncção

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2,$$

que deve tornar-se um quadrado perfeito tomando-se convenientemente α e β, um multiplo indeterminado da que deve ser nulla em virtude da ligação das duas variaveis, e em tratar depois estas como si fossem plenamente independentes, de maneira a converter a questão proposta neste simples problema de algebra : tornar um quadrado perfeito o prolynomio a duas indeterminadas,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+k(ay^2+bxy+cx^2+dy+ex-1),$$

por meio de certos valores das constantes α, β e k. Esta pesquiza algebrica poderia operar-se de muitas maneiras, como no caso analogo, mui conhecido, de um polynomio em x somente. Mas, em vez de proceder pela extracção da raiz, é preferivel empregar, sobretudo aqui, o methodo das indetermrnadas de Des artes, comparando o polynomio proposto a um quadrado artificial

$$(px+qy+r)^2.$$

Ora, si se desenvolvem as seis condições ordinarias de uma tal coincidencia, sentir-se-ha facilmente que, eliminando-se logo o multiplo aux liar k, geometricamente superfluo, recahe-se necessariamente nas cinco relações directamente estabelecidas no numero precedente para a determinação das constantes α, β, p. q, r. Assim, este segundo modo equivale em fim ao primeiro, salvo um novo circuito analytico, estranho á pesquiza geomotrica.

Bem que, por este motivo, esta marcha não deva ser aqui empregada habitualmente, tenho em alto preço a occazião, que se me apresenta, de caracterisar, em um caso elementar sufficientemente

importante, o grande artificio de analyse que serve-lhe de base. Este artificio, que até hoje nunca fora directamente concebido na sua inteira generalidade, consiste em reduzir, em todo problema analytico, o caso da dependencia das variaveis ao de sua independencia, ajuntando á funcção que constitue o assumpto da condição proposta, um multiplo indeterminado da que deve annullar-se em virtude da ligação das variaveis consideradas. A principio introduzida por Euler na mais alta theoria dos *maxima* e *minima*, esta concepção, devido a Lagrange, tornou-se em seguida um dos meios mais preciosos da mecanica analytica. O seu uso legitimo repousará por toda parte, como acima, sobre que uma tal adjuncção, que então não altera o estado da funcção proposta, confunde em um só todos os modos possiveis de levar em consideração a relação dada, e permitte, por consequencia, tratar d'ahi por diante as variaveis como independentes.

95.— Depois de ter estabelecido sob uma ou outra forma geral a theoria fundamental dos focos e das directrizes, importa concebel-a, em sentido inverso, como propria a formular qualquer condição geometrica relativa, quer ao foco, quer á directriz, quer á sua mutua relação, o que d'ante-mão levantará, em relação ás cursas do segundo grau, as difficuldades essenciaes que possam apresentar quaesquer problemas em que sejam introduzidas taes condições.

Si a curva deve ter um foco dado, suppor-se-hão conhecidas as constantes α e β nas cinco equações determinantes (93), nas quaes a eliminação de p, q e r conduzirá então ás duas relações procuradas entre os coefficientes a, b, c, d, e, relações communs a todas as curvas do mesmo foco, e proprias a determinar cada uma destas juntamente com outras quaesquer prescripções. Mas, em vez de formular distinctamente estas condições, não se terá muitas vezes necessidade sinão do typo analytico que lhes corresponde para a equação do logar, assim reduzida a conter só tres constantes arbitrarias. Ora, esse typo poderia ser formado directamente, sem tão longo calculo, por meio da equação fundamental

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(px+qy+r)^2,$$

relativa á propriedade focal das curvas do segundo grau, e na qual bastaria então attribuir os valores convenientes ás coordenadas α e β do foco, concebendo como indeterminadas as outras constantes, p, q, r, proprias á directriz e á relação especifica.

Quando a curva tiver uma directriz dada, $y=hx+k$, juntar-se-hão ás cinco formulas do n. 93 as condições $-\frac{p}{q}=h$, $-\frac{r}{q}=k$, e a eliminação das cinco constantes α, β, p, q, r, fará descobrir as duas relações correspondentes entre os coefficientes da equação proposta. Si se quer constituir esta directamente por meio dessa obrigação geometrica, será ella naturalmente

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=m^2(y-hx-k)^2,$$

suppondo-se indeterminadas as tres constantes α, β, m, relativas ao foco e á relação especifica.

Quando o foco, em logar de ser inteiramente dado, deve sómente pertencer a uma linha conhecida, $f(x, y)=0$, bastará ajuntar ás cinco igualdades fundamentaes a condição correspondente $f(\alpha, \beta)=0$, para que a eliminação das constantes, α, β, p, q, r, permitta obter a relação conveniente entre a, b, c, d, e. No segundo modo de solução, empregar-se-hia a ligação proposta entre α e β a referir uma destas constantes á outra, o que permittiria restringir sufficientemente a equação focal, de maneira a desembaraçar apenas as curvas susceptiveis de um tal accidente.

Semelhantemente, si a directriz $px+qy+r=0$, sem ser de todo dada, devesse tocar uma certa curva ou satisfazer a tal outra condição equivalente que dê logar a uma relação especial entre , q, r, esta nova igualdade tornaria possivel a eliminação das pcinco constantes ordinarias, de modo a manifestar a ligação correspondente dos coefficientes primitivos. Sob a segunda forma tal igualdade permittiria referir uma das constantes p, q, r, ás outras duas, de maneira a restringir convenientemente a equação fundamental.

Proceder-se-hia do mesmo modo em relação a condições que, em vez de se referirem isoladamente ao foco ou á directriz, fossem concernentes á sua mutua disposição. Qualquer que fosse a prescripção geometrica, logo que tivesse sido formulada directamente entre as constantes relativas ao foco e á directriz, poderia ser assim

convertida quer em uma equivalente ligação dos coefficientes primitivos, quer em uma restricção correspondente do typo focal. E' superfluo advertir que, si os eixos são disponiveis, sua escolha judiciosa poderá facilitar muito a execução destas diversas operações analyticas.

A respeito dessas questões compostas, que comportam grande variedade, creio que só devo deter-me aqui em uma menção especial das que são concernentes ás condições de semelhança ou de igualdade das curvas do segundo grau. De accordo com os nossos principios geraes, a definição focal indica com evidencia que duas curvas deste genero só serão semelhantes emquanto a relação constante $\sqrt{p^2+q^2}$ tiver ahi o mesmo valor, e é por isso que habitualmente o qualifico de especifico. A igualdade das duas curvas exigirá, além disso, a coincidencia das distancias respectivas do foco á directriz, representadas pela formula

$$\frac{p\alpha+q\beta+r}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

A' vista disto, si se quizesse formular a semelhança das duas curvas

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=1$$

$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x=1,$$

seria preciso identificar as duas expressões correspondentes de p^2+q^2, previamente deduzidas das cinco relações do n. 93, e assim deveria reproduzir-se a condição que já obtivemos, no ultimo capitulo da terceira parte, por um caminho muito mais simples. Quanto á igualdade das duas curvas, seria, além disso, necessario exprimir tambem a identidade dos dous valores correspondente da formula $\frac{p\alpha+q\beta+r}{\sqrt{p^2+q^2}}$, e de novo achar-se-hiam, embora com mais trabalho, as duas relações que seriam directamente fornecidas pelo methodo geral para a superposição analytica de duas curvas quaesquer, por meio da coincidencia de suas equações por uma conveniente transposição de eixos. N'um ou n'outro caso, este methodo espe-

cial melhor conviria sob sua segunda forma, por uma justa e immediata restricção da equação focal. De facto, pondo-se $\sqrt{p^2+q^2}=n$ e $\frac{p\alpha+q\beta+r}{\sqrt{p^2+q^2}}=m$, formar-se-hia logo a equação

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x\sqrt{n^2-q^2}+qy+r)^2,$$

relativa ás curvas semelhantes; ou, para as curvas iguaes, a equação mais particular

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\left[x\sqrt{n^2-q^2}+qy+(mn-\alpha\sqrt{n^2-q^2}-q\beta)\right]^2).$$

96.—Para completar sufficientemente a theoria dos focos e das directrizes, resta apreciar um methodo subsidiario que resulta expontaneamente de uma judiciosa modificação do methodo fundamental para com certas equações do segundo grau, as quaes importa tanto mais considerar aqui em separado, quanto comprehendem ellas os casos usuaes a que com especialidade deveremos applicar tal theoria nos capitulos seguintes.

Consideremos a equação focal

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(px+qy+r)^2;$$

vê-se que de commum se achará nella o termo em xy emquanto p e q não forem nullos, iste é, geometricamente, quando a directriz não fôr parallela a nenhum dos eixos coordenados. E' por isso que a distancia ao foco não pode, em geral, ser racional sinão em relação ás duas variaveis ao mesmo tempo, como acima annunciei afim de prevenir uma viciosa rotina. Porém, para toda equação do segundo grau em que as variaveis estão separadas, vê-se assim que a directriz é sempre perpendicular a um dos eixos geometricos da curva, conforme a discussão directa do n. 23, e a distancia torna-se racional em funcção de uma só das coordeeadas. Segundo isto, poder-se-ha proceder então mais simplesmente á determinação do foco e em seguida á da directriz, tendo em vista a equação da curva pela substituição natural de y em x ou de x em y na formula

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2,$$

que a final se tratará de tornar quadrado perfeito, quando estiver desenvolvida convenientemente em relação á unica variavel conservada. Ora, esta questão algebrica nenhuma difficuldade essencial poderia offerecer, nem exigir um calculo penivel. A funcção assim formada será a principio de ordinario irracional, e portanto será mister destruir previamente um tal obstaculo analytico, o que tenderá a determinar uma das duas constantes α, β, emquanto que a outra será depois determinada por meio da condição elementar para os quadrados trinomios.

Este methodo subsidiario de que naturalmente faremos grande uso, não tem outro inconveniente proprio alem da incerteza primitiva sobre o verdadeiro sentido da directriz, a qual sabe-se só que deve ser então para lela a um dos dois eixos coordenados. Dahi resulta algebricamente a obrigação de executar alternativamente as duas substituições de x por y e de y por x, que a principio devem parecer indifferentes, e das quaes comtudo uma só convem á solução actual, a qual poderia pois escapar á adopção arbitraria de uma substituição unica. Mas, apezar desta dupla operação algebrica, tal methodo não constituirá menos habitualmente, para casos que se lhe referem, uma util simplificação da marcha geral.

CAPITULO II

THEORIA DA PARABOLA

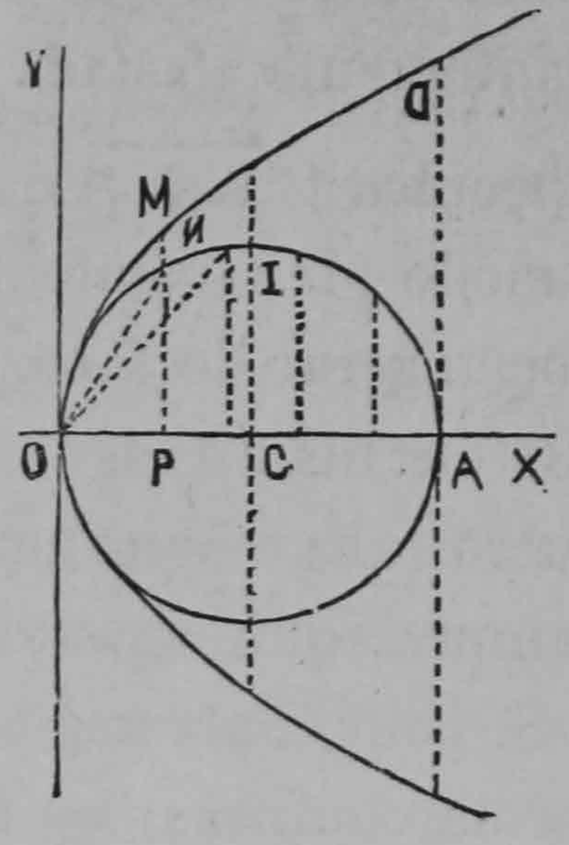
97.—A equação $y^2=mx$ a mais simples de quantas é susceptivel a parabola, é já muito propria a dar uma idéa mui clara da forma geral desta linha. Sua discussão directa mostra que a curva, symetrica em torno do eixo dos x, estende-se indefinidamente no sentido das abscissas do mesmo signal que a constante m, que habitualmente supporemos positiva, sem nun a penetrar do ontro lado do eixo dos y, e afastando-se de mais a mais dos dous eixos ao mesmo tempo, porém menos rapidamente do primeiro que do segundo. Além do grau já indicar sufficientemente a di-

recção effectiva da curvatura, o coefficiente angular da tangente, tang $\alpha = \frac{m}{2y}$, leva á evidencia que a parabola é sempre concava para o seu eixo, ao qual gradualmente tende a tornar-se paralle a, bem que nunca o venha a ser exactamente; de sorte que seus dous ramos tanto menos divergem um do outro quanto mais se prolongam, e no infinito seriam parallelos. Esta continua tendencia e a ausencia correspondente de asymptotas rectilineas devem impedir que jamais se confunda, mesmo a olho, o aspecto de uma parabola com o de uma semi-hyperbole, por grosseiro que seja o respectivo traçado. Pois que o conjuncto do curso da primeira figura faz variar mais a direcção da tangente, a sua curvatura total é, em consequencia, mais pronunciada do que na segunda.

Si assim se quizesse construir realmente os diversos pontos doa logar, bastaria combinar com cada abscissa uma ordenada igual á media proporcional entre esta abscissa variavel e a extensão constante m, que caracterisa individualmente cada parabola, e que, a este titulo, é especialmente qualificada de *parametro*. Reciprocamente, pode-se obter sobre uma parobola ja traçada a grandez-effectiva do seu parametro quasi tão facilmente como se acha graphicamente o raio de um circulo, concebendo-o, de accordo com a equação fundamental $y^2 = mx$, como a distancia ao eixo da extremidade da corda tirada do vertice sob um angulo de 45º. Outro qualquer ponto do logar determinaria igualmente esta distancia, por meio da lei $m = \frac{y^2}{x}$; mas aquelle offerece a vantagem de uma construcção muito mais simples, que merece tornar-se familiar, para que a imagem do parametro nunca se separe da de sua curva.

Emfim, sendo a parabola, depois do circulo, a mais simples de todas as curvas, convém notar, a respeito desta equação, o modo facil por meio do qual podoriamos deduzir uma do outro, recordando-nos de que as extensões das diversas cordas circulares tiradas de um mesmo ponto são ligadas ás suas projecções sobre o diametro correspondente, da mesma maneira que as ordenadas parabolicas dependem de suas abscissas. Si, pois, prolongassemos as ordenadas NP de um circulo relativamente a um diametro qualquer OCA *(fig. 70)* de manaira a tornal-as iguaes ás cordas corres-

pondentes ON, os pontos **M** assim obtidos formariam uma parabola, cujo parametro seria igual ao diametro do circulo, e que um tal traçado estenderia somente até o ponto D que, segundo a indicação precedente, serve para marcar commodamente o parametro. Concebe-se demais que uma tal relação da parabola para o circulo, plenamente conforme com a ausencia commum da condição de semelhança, não contradiz na rea idade a nossa noção sobre o numero de pontos determinante; pois que então deve a posição da parabola exigir mais uma constante do que a do circulo, afim de fixar o ponto de que procede esta construcção.



(Fig. 70)

98.— Depois desta interpretação directa da equação simplificada da parabola, consideremos successivamente as diversas propriedades caracteristicas que, segundo nossos methodos geraes, constituem mais longiquas consequencias della, começando pelas propriedades focaes.

Achando-se as variaveis separadas na equação $y^2=mx$, é mister applicar-lhe o methodo subsidiario, explicado no fim do capitulo precedente, para determinar o foco por substituição de y a x ou reciprocamente, na funcção $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^3$ ou

$$d^2=x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha^2+\beta^2)$$

que assim deve tornar-se quadrado perfeito. Pela primeira substituição tem-se

$$d^2=x^2+(m-2\alpha)x-2\beta\sqrt{mx}+(\alpha^2+\beta^2),$$

o que mostra logo que o foco deve estar sobre o eixo para que d^2 seja racional pela annulação de β. Isto posto, a funcção torna-se $x^2+(m-2\alpha)x+\alpha^2$, e, applicando-lhe a condição conhecida para os trinomios quadrados, acha-se $\alpha=\frac{m}{4}$. Existe, pois, com effeito, sobre o eixo da parabola, um unico foco á uma distancia do vertice, igual a um quarto do parametro. Sua distancia racional a

um ponto qualquer da curva torna-se assim $d = x + \frac{1}{4}m$; e, annullando-a, vê-se que a directriz é uma perpendicular ao eixo, semelhantemente afastada do vertice, mas em sentido inverso: a relação especifica $\sqrt{p^2+q^2}$ é aqui evidentemente igual a unidade. Tal é o modo plenamente natural segundo o qual, uma vez admittida a noção geral do foco, a analyse faz gradualmente surgir da equação das curvas do segundo grau, limitadas de um lado e illimitadas do outro, a sua concepção geometrica como geradas por um ponto sempre equidistante de um ponto fixo e de uma recta fixa.

Si pelo contrario se substituisse x a y, poder-se-hia sob outra forma confirmar os methodos precedentes. Com effeito, ter-se-hia então

$$d^2 = \frac{y^4}{m^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right) y^2 - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2).$$

Bem que seja esta funcção espontaneamente racional, a condição previa $\beta = 0$ não lhe é menos indispensavel para que possa ella tornar-se quadrado; por quanto, devendo a sua raiz ser do segundo grau, deve além disso carecer do termo do primeiro, pois que o polynomio mesmo não contem o do terceiro. De accordo com esta primeira determinação, a funcção reduz-se ao trinomio

$$\frac{y^4}{m^2} + \left(1 - \frac{2\alpha}{m}\right) y^2 + \alpha^2$$

que, terminada a operação, reproduzirá, tão claro como acima, a condição $\alpha = \frac{1}{4}m$. Este segundo modo algebrico do methodo auxiliar dos focos não consegue pois, como se devia prever, sinão a volta do primeiro resultado, sob forma aliás pouco conveniente, pois que a funcção d, sendo então do segundo grau, não comportaria mais directamente a interpretação geometrica que coustitue a base principal de uma tal theoria.

Para o leitor familiarisar-se melhor com a posição do foco e portanto da directriz, é preciso observar que e sua abscissa convem a uma ordenada parabolica que é duas vezes maior que ella, demais igual ao semi-parametro. Dahi resultam novas ma-

neiras de encarar o parametro de uma parabola, ou como a corda perpendicular ao eixo tirada do foco, ou como a dupla distancia do foco á directriz.

Seria superfluo insistir aqui sobre as facilidades evidentes, obtidas pela propriedade focal da parabola, para descrever esta curva por pontos ou por um movimento continuo.

99.— Entre os numerosos problemas relativos á determinação da parabola por meio das condições proprias ao foco e á directriz, e cuja solução analytica não poderia agora offerecer nenhuma difficuldade essencial ao leitor, sufficientemente imbuido dos nossos principios geraes, limitar-me-hei a considerar especialmente, quer a titulo de exemplo caracteristico, quer em razão de sua utilidade real, aquelle em que se dá, com dous pontos da curva, o foco ou a directriz.

No primeiro caso, esta questão de geometria abstracta comporta uma preciosa destinação astronomica, para determinar o curso de um cometa por meio de duas posições observadas, adoptando a feliz approximação parabolica especialmente applicada por Newton só á parte da orbita, que habitualmente pode ser visivel. Supponhamos, pois, que se trate de fazer passar em dous pontos dados uma parabola que tenha um foco dado, o qual em tal applicação celeste seria o sol. A propriedade focal fará achar facilmente uma solução graphica, que consiste em construir a principio a directriz como tangente commum aos dous circulos que, tendo seus centros respectivos nesses dous pontos, se cortariam no foco. Uma vez achada esta recta, resultariam sem difficuldade o eixo, o vertice e o parametro da parabola. Obter-se-hão assim duas parabolas, de ordinario muito differentes de posição e mesmo de grandeza, entre as quaes as indicações astronomicas dissipariam facilmente qualquer indecisão. Demais, esta construcção indica, conforme a natureza do problema, que a questão não poderia offerecer outros casos de impossibilidade alem dos attinentes á coincidencia de um dos pontos dados com o foco, ou á situação dos dous pontos em linha recta com o foco e do mesmo lado.

A solução analytica nenhum embaraço pode apresentar, pois que refere-se a condições ja formuladas especialmente. Si os eixos

são disponiveis, pode ser muito simplicada col ocando-se a origem no foco dado e dirigindo-se um delles a um dos pontos dados. Ter-se-ha então a equação.

$$y^2+x^2=(px+qy+r)^2,$$

na qual o caracter parabolico da logo a relação $p^2+q^2=1$. Quanto as cutras duas condições proprias a determinar as constantes desconhecidas p, q. r, serão em virtude das duas passagens

$$y'^2+x'^2=(px'+gy'+r)^2,$$

$$x''^2=(px''+r)^2.$$

Como são inteiramente desconhecidos os primeiros membros destas equações, relativas ás distancias u' e u'' desses pontos ao foco, poder-se-ha reduzil-as ao primeiro grau, sob a forma

$$px+qy+r=u'$$

$$pu''+r=u'',$$

e desde então facilmente se referirá p e q a r, que afinal se determinará por uma equação do segundo grau, resultante da condição primordial $p^2+q^2=1$.

Por occasião deste problema, creio dever estabelecer summariamente uma importante noção de philosophia mathematica, até hoje muito confusa, sobre a natureza dos diversos symptomas analyticos de impossibi idade, que cega rotina algebrica leva repetidas vezes a crer-se indistinctamente anunciada pe a imaginariedade das incognitas, bem que o modo deva necessariamente variar segundo os casos. De accordo com a harmonia fundamental que em mathematica deve sempre reinar entre as apreciações concretas e as indicações abstractas, pode-se constantemente prever de que maneira deverá a impossibilidade ser analyticamente manifestada, segundo uma judiciosa discussão especial, destinada a discernir si são vagas ou precisas as condições que a caracterisam ; em outros termos, si carrespondem a uma simples desigua dade ou a uma verdadeira relação de igualdade. No primeiro caso, a analyse necessariamente conduzirá a valores imaginarios, sal-

vo si os valores negativos forem semelhantemente inadmissi-veis, o que em geometria raras vezes acontece. Quanto ao segundo caso, o symptoma analytico deverá mudar de natureza, e consistirá em certos valores reaes especialmente excluidos do assumpto; o mais das vezes esta exclusão determinada se limitará aos valores nullos ou infinitos. Tal é o principio philosophico que deve sempre dominar a discussão effectiva das soluções analyticas relativas a qualquer ordem de investigações concretas.

Applicando-o á questão actual, reconhe-se logo que todos os casos de impossibilidade são de natureza precisa, e que, por conseguinte, a indicação algebrica destes casos deve resultar de valores reaes inadmissiveis. Si a incognita principal é r, que geometricamente designa a distancia do foco á directriz, só haverá exclusão para os valores 0 e ∞. E', pois, por um delles que será sempre enunciada a impossibilidade, e nunca pela imaginariedade, com quanto a equação em r seja do segundo grau. Mostra demais o exame da solução graphica que esta indicação resultará aqui de valores nullos e não de valores infinitos. Convido o leitor a confirmar algebricamente tal previsão racional.

Com relação a este primeiro problema, convem notar, mas só para a applicação astronomica, a util simplificação que receberia a solução analytica, si se empregasse a equação polar da parabola em torno do foco (23), que espontaneamente dispensaria de formular-se a mais difficil condição. Com as actuaes notações, esta equação seria

$$u = \frac{\frac{1}{2}m}{1 - \cos(\varphi + \alpha)},$$

modificada segundo o espirito da questão, de modo á dirigir arbitrariamente o eixo polar. A passsagem da curva pelos dous pontos dados fornecerá com facilidade a determinação das duas constantes, linear e angular, proprias a este typo analytico, e que fixam, uma a grandeza, a outra a direcção da parabola procurada. Dirigindo o eixo polar a um desses pontos, ter-sehiam assim as duas relações

$$u' = \frac{\frac{1}{2}m}{1-\cos(\varphi'+\alpha)}, \qquad u'' = \frac{\frac{1}{2}m}{1-\cos\alpha},$$

d'onde, eliminando m, se concluirá para o angulo α, a equação trigonometrica

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos(\varphi'+\alpha)} = \frac{u''}{u'},$$

cuja resolução se simplificará muito introduzindo-se os semi-angulos, e fará conhecer a dupla inclinação do eixo da parabola sobre um tal eixo polar.

Supponhamos agora que o foco dado seja substituido pela directriz; facilmente se transformará a solução graphica, construindo o foco por meio da intersecção dos circulos ja considerados, cujos raios serão neste caso as distancias dos dous pontos á directriz dada. Resultarão ainda duas parabolas desiguaes, bem que parallelas. Quanto aos casos de impossibilidade, consistiriam a principio na passagem da directriz a um dos pontos dados, ou na sua perpendicularidade á recta que os une, mas, além destas hypotheses relativas a condições precisas, comportará a questão outras excepções de natureza vaga, quando, por exemplo, a directriz cahir entre os dous pontos ou, em geral, si estes estão muito afastados.

A solução analytica será muito simples, si a disponibilidade dos eixos permitte tomar a directriz dada para um delles, dirigindo o outro para um dos pontos dados. Nesta hypothese, a equação focal torna-se

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=x^2,$$

e as duas passagens determinarão sem difficuldade as coordenadas desconhecidas do foco por meio das relações

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha x'-2\beta y'+y'^2=0, \qquad \alpha^2+\beta^2-2\beta y''+y''^2=0.$$

cuja subtracção forneceria uma equação do primeiro grau em α e β, de modo a levar promptamente a uma equação final do segundo grau em α, por exemplo, distancia do foco á directiz. A

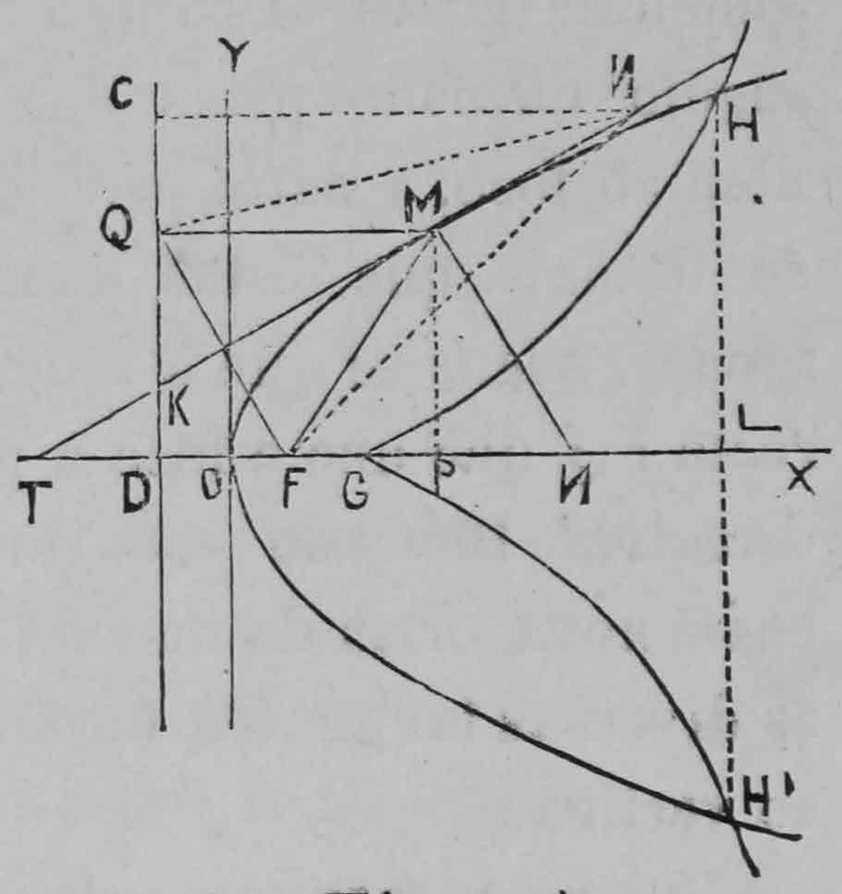
primeira classe de casos de impossibilidade annunciar-se-hia naturalmente por valores nullos, e a segunda pela imaginariedade.

Supprimindo-se um dos pontos dados, cada um dos dous problemas precedentes tornar-se-hia indeterminado, seguindo todavia a justa medida que comporta a pesquiza dos logares geometricos, assignando, não posições fixas, mas invariaveis tragectos, aos diversos pontos inherentes á parabola. Poderá, pois, o leitor a este respeito excercitar-se em descobrir logares mais ou menos notaveis, sobre tudo os do vertice ou do ponto parametrico.

100.—Consideremos agora as propriedades da parabola quanto ás tan[illegible]tes. Em qualquer ponto (x', y') da curva $y^2 = mx$, a tanger[illegible] terá para equação, segundo a theoria geral,

$$y - y' = \frac{m}{2y'}(x - x').$$

Para deduzir d'ahi a sua construcção, basta procurar, fazendo $y = 0$, a abscissa do ponto em que ella encontra o eixo, e acha-se $x = -x'$; de sorte que este ponto T *(fig. 71)* e o pé P da ordenada estão sempre equidistantes do vertice. Ennuncia-se de ordinario este resultado dizendo que na parabola a *sub-tangente* TP é constantemente o dobro da abscissa do ponto de contacto. Porém a forma mais notavel sob que elle pode apresentar-se, consiste em reconhecer que a *sub-normal* PN é sempre igual á metade do parametro ; por que, em toda curva, o triangulo rectangulo TMN mostra que a ordenada é media proporcional entre a sub-normal e a sub-tangente, d'onde $PN = \frac{y^2}{TP}$; ora, aqui $TP = 2x'$, por tanto $NP = \frac{y^2}{2x'} = \frac{m}{2}$. D'ahi resu ta, em sentido inverso, uma nova maneira de encarar o parametro da parabola, assim ligado a uma tangente qualquer, como o dobro da sub-normal.



(Fig. 71)

A proposito deste theorema, convem notar uma consequencia

especial, relativa ao primeiro esboço espontaneo de uma importante noção geometrica que aliás só a analyse pode convenientemente estabelecer. Considerando uma normal cada vez mais visinha ao eixo da parabola, vê-se que o ponto N em que ella corta-o, apezar de aproximar-se sempre do vertice, tem por limite o ponto G, duas vezes mais afastado do que o foco F; aqui, pois, essa extrema posição tornar-se-hia o centro do circulo que, segundo a indicação geral do n.º 44, tivesse em O o mais intimo contacto com a curva. Sob um outro aspecto, o caminho normal, dirigido segundo o eixo a partir de um ponto situado na concavidade da parabola, seria um *minimum* ou um *maximum*, segundo se achasse este ponto de partida aquem ou alem do limite G.

O theorema fundamental que acabamos de considerar sob diversas formas para a tangente á parabola, adquire nova importancia geometrica, quando combinado com a propriedade focal. De facto, esta relação OT=OP dá logo FT ou $OT+\frac{1}{4}m = MF$ ou a $x'+\frac{1}{4}m$; portanto os angulos oppostos FMT e MTF são constantemente iguaes. Assim, a tangente á parabola é a bissectriz do angulo formado pelas duas rectas tiradas do ponto de contacto, uma ao foco, a outra perpendicularmente á directriz. Observando-se demais que estas duas rectas MF e MQ são constantemente iguaes, segue-se que a tangente é sempre perpendicular ao eio da recta FQ que une o foco á projecção do ponto de contacto sobre a directriz. Devendo este meio cahir sempre em K, vê-se tambeme como nova forma da mesma relação, que as projecções do foco sobre as diversas tangentes formam uma linha recta, que é a tangente ao vertice.

Physicamente encarada, em virtude da lei geral da reflexão da luz ou do calor, esta importante propriedade geometrica explica directamente a idéa de concentração calorifica que lembra esponr taneamente o nome de foco. Porque, todo raio de luz ou de calo- que cahisse sobre a parabola parallelamente ao seu eixo, deveria assim reflectir-se sempre para o foco, afim de manter a igualdade necessaria entre os angulos de reflexão e de incidencia, formados com a tangente. Da parabola, esta propriedade se estenderia evidentemente ao paraboloide resultante da rotação d'ella ao redor do

seu eixo; de sorte que um tal espelho é proprio a concentrar em um ponto unico o calor que recebe sua concavidade total n'uma mesma direcção, sa'vo o inevitavel enfraquecimento que toda reflexão occasiona. Em sentito inverso. semelhante reflector é muitas vezes empregado, sobre tudo nos pharóes, em tornar parallelos todos os raios que divergem de um mesmo ponto, por meio de uma segunda reflexão analoga, conforme uma celebre experiencia thermologica.

Quanto ao uso puramente geometrico de tal propriedade, offerece ella directamente a vantagem de adaptar-se indifferentemente á construcção da tangente nos tres casos elementares que de commum se lhe referem, ou sendo dado o ponto de contacto, ou a direcção, ou um ponto exterior. Para o primeiro caso, basta elevar uma perpendicular ao meio K da recta FQ precedentemente edfinida. E' facil vericar em especial, á maneira dos antigos, que uma tal perpendicular terá, com effeito, fóra da parabola todos os seus pontos differentes de M, pois que um qualquer N d'entre elles, achando-se assim equidistante de F e de Q, estará necessariamente mais proximo da directriz que do foco, e desde então é exterior á curva. Sob esta forma não podia, pois, a determinação das tangentes á parabola offerecer aos antigos nenhuma difficuldade essencial, desde que puderam proceder segundo a propriedade focal que, no seu modo de estudo deve ter constituido a todos os respeitos o principal obstaculo proprio á theoria das secções conicas.

Si agora quer-se traçar uma tangente parallela a uma recta dada, poder-se-ha immediatamente determinar a recta FQ, e por conseguinte se applicará igualmente a construcção precedente, sem que mesmo a intervenção graphica da parabola seja indispensavel para marcar o ponto de contacto, que será sufficientemente assignavel por meio da sua projecção Q sobre a directriz. Quanto á solução analytica do mesmo problema, consistiria ella a principio em achar a ordenada, e desde então a abscissa do ponto de contacto, invertendo a lei primord al tang $\alpha = \frac{m}{2y}$,. Mas pode-se tambem tratar directamente esta questão, segundo o principio das raizes iguaes, procurando a relação do coefficiente linear ao angular que

torna a recta $y=ax+b$ susceptivel de tocar a curva $y^2=mx$: acha-se então $b=\frac{m}{4a}$, d'onde resulta a equação

$$y=ax+\frac{m}{4a},$$

que importa encarar como a mais propria a caracterisar uma tangente qualquer á parabo a, quando a natureza das questões exigir que esta tangente seja sobretudo considerada segundo sua direcção e independentemente do ponto de contacto.

Emfim, quando a tangente deve partir de um ponto exterior N, a recta FQ ainda pode ser facilmente achada, pois que o ponto Q, sempre situado sobre a directriz, está além disso a uma distancia deste ponto N, igual a NF, de sorte que elle resultará da intersecção da directiz com o circulo descripto do centro N com o raio NF. Este encontro, necessariame nte duplo, si o ponto dado N está verdadeirameute fóra. determinará pois as duas rectas sobre cujos meios devem ser perpendiculares as tangentes procuradas, cuja construcção se acabará desde então como acima. Pode-se notar a este respeito que, si o ponto N pertencesse a directriz, essas duas rectas auxiliares, e por conseguinte as duas tangentes seriam necessariamente rectangulares, o que permitte encarar a directriz como descripta pelo vertice de um angulo sempre circumscripto á parabola.

A so ução analytica do mesmo problema nenhuma difficuldade apresenta, se undo as explicações geraes (41), para achar as coor' denadas do ponto de contacto, combinando as duas equações

$$y'-\beta=\frac{m}{2y}(x'-\alpha), \quad y'^2=mx'.$$

Mas, si, sem operar a eliminação, se q uizesse construir o resu tado cortando a parabola dada pelo logar que correspondesse á primei a equação, em que x' e y' variam a ser variaveis, seria preciso a principio transformal-a com auxilio da segunda, afim de evitar o logar parabolico que ella forneceria espontaneamente. Assim reduzida ao primeiro grau, esta equação,

$$mx'-2\beta y'+m\alpha=0,$$

representaria a recta que unisse os dous pontos de contacto procurados. Não é inutil observar : 1.º que o ponto em que ella encontra o eixo da parabola ficaria invariavel, si o ponto de partida das duas tangentes se deslocasse perpendicularmente a este eixo, e tambem em relação a uma outra parabola tendo o mesmo eixo e o mesmo vertice, pois que a abscissa $-\alpha$ deste ponto é independente de β e de m ; 2.º que sua intersecção com o eixo dos y não mudaria, si o ponto de partida se deslocasse em linha recta com o vertice ; 3.º que a direcção dessa corda dos contactos se conservaria a mesma, si o ponto dado se deslocasse parallelamente ao eixo. Intrinsecamente, estas pequenas observações offerecem pouco interesse e ainda menor importancia ; mas podem servir para tornar mais sensivel aos principiantes a exacta interpretação geometrica dos resultados algebricos, mesmo considerados em relação aos elementos que ahi não entram.

A proposito de uma tal construcção das tangentes tiradas de um ponto exterior á parabola, devo mencionar uma propriedade mais essencia , commum ás tres curvas do segundo grau, e tendente a determinar directamente a corda dos contactos, por meio de duas secantes quaesquer tiradas do ponto dado. Unindo-se não só lateralmente, mas tambem em diagonal, as suas quatro intersecções com a curva, resultarão dous pares de rectas que por seus respectivos encontros determinarão afinal dous pontos sempre situados sobre aquella corda, e desde então sufficientes para traçal-a, de maneira a deduzir as tangentes pedidas, o que constitue de certo, a este respeito, a mais conveniente de todas as soluções graphicas em que se faz intervir a curva. Como uunca deixará de haver o encontro das linhas transversaes, o theorema conservaria toda a sua efficacia, si as linhas lateraes se tornassem parallelas, porquanto a recta procurada teria então a mesma direcção dellas. Deixo ao leitor a execução e mesmo a instituição dos calculos um pouco longos que exige a demonstração analytica desta notavel proposição, cuja origem effectiva é pouco conheeida. O principal embaraço consistirá em decidir si, na escolha dos eixos mais proprios a simplificar esta operação, deve-se preferir a mais simples equação das tres curvas do segundo grau, $y^2 = mx + nx^2$,

expondo-se a complicar as equações das duas secantes iniciaes ; ou, ao contrario, ter essencialmente em vista as simplificações relativas a estas duas rectas, sobretudo tomando-as para eixos, mas ficando na contingencia de empregar em relação á curva a equação a mais geral, $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=1$. Si o leiror for feliz em tomar tal deliberação, tornar-se-ha pouco laborioso este exercicio analytico.

101.—Entre os numerosos problemas a que póde dar logar a consideração das tangentes á parabola, limitar-me-hei a assignalar especialmente, como typos, a determinação de uma parabola por meio de duas tangentes, ou de uma só e um ponto, conjunctamente com o foco ou a directriz. A solução graphica consistirá, sobretudo, do mesmo modo que no n. 99, em construir a principio a directriz ou o foco. Si a parabola, tendo um foco dado, deve tocar duas rectas dadas, é facil ver que cada uma destas indicará um ponto da directriz, o qual será o symetrico do foco em relação a cada uma. Si uma das tangentes fosse substituida por um ponto, a directriz deveria tocar o circulo que, com o centro neste ponto, passasse no foco. Ter-se-ha, pois, n'um caso ou n'outro, a directriz, e por conseguinte tudo o que é concernente á parabola, unindo-se dous pontos ou tirando de um ponto uma tangente a um circulo. Na primeira questão, a impossibilidade proviria de condições precisas, tendentes a fazer a directriz passar no foco, e, na segunda, poderia alem disso resultar de condições vagas, relativas á situação do ponto interiormente ao circulo. Quando a parabola devesse, ao contrario, admittir uma directriz dada, cada tangente indicaria um logar do foco, a saber, a recta que forma com essa tangente um angulo igual ao que ella mesma fizesse com essa directriz ; e desde então o foco resultaria facilmente ou do encontro de duas rectas taes, ou da intersecção de uma dellas com o circulo tangente á directriz, o qual tivesse para centro um ponto dado da curva.

A solução analytica destes problemas não poderia agora offerecer nenhuma diffi uldade de instituição, em vista dos nossos principios geraes, nem mesmo nenhum embaraço de execução, escolhendo-se os eixos convenientemente. Demais, as indicações precedentes fariam prever com facilidade a natureza algebrica

dos diversos symptomas de impossibilidade, que os principiantes poderão utilmente verificar. Si, por exemplo, é dada a directriz e d'ella se faz o eixo dos y, a equação da parabola será, como acima (99),

$$y^2 - 2\beta y - 2\alpha x + (\beta^2 + \alpha^2) = 0.$$

Desde então, para formu ar o contacfo de uma recta, $y = ax$, sobre a qual se tivesse escolhido a origem, o principio das raizes iguaes fornecerá a relação

$$2a\beta = (a^2 - 1)\alpha.$$

Desprezando outra qualquer condição, a parabola seria indeterminada, mas sus:eptivel de logares, entre os quaes esta relação indica espontaneamente o do foco: facil é reconhecer ahi a recta acima introduzida. Este caso é notavel pela natureza uniformemente rectilinea de todos estes logares, como póde o leitor verificar facilmente passando analyticamente desse logar immediato do foco aos que delle derivariam mais ou menos indirectamente, para o vertice, o ponto parametrico, etc. Uma observação geral, que é util assignalar aqui, a vista de sua efficacia em diversos outros casos analogos, explica logo esta particularidade, em viriude do principio geometrico que serve de melhor base á theoria analytica da semelhança das cnrvas. De facto, sendo sempre semelhantes as curvas aqui comparadas, e demais collocadas paral elamente por causa da directriz commum, e tendo além disso para centro evidente de semelhança ou de homologia a intersecção desta directriz com a tangente commum, todos os logares que se lhes referirem serão necessariamente rectas dirigidas para aquelle ponto.

O mais interessante, a todos os respeitos, dos logares multiplicadissimos que produziria a parabola considerada quanto ás suas tangentes, consiste na cissoide resultante da projecção do vertice sobre as tangentes. Discutindo-se directamente tal definição, é facil reconhecer logo uma curva necessariamente symetrica em torno do eixo, e terminando na directriz que lhe é asymptota. Esta ultima condição resulta de que, sendo, quando muito, igual ao seu comprimento a projecção de uma distancia, jamais pode a prejecção do vertice sobre uma tangente afastar-se da do foco, que,

sabemos, pertence sempre á tangente ao vertice, sinão de uma quantidade,quando muito, igual á distancia do vertice á directriz. Tal previsão está alem disso em harmonia com a noção da directriz como logar das intersecções das tangentes rectangulares. Si agora procurar-se a equação do logar proposto, quer por meio da equação da tangente relativa ao ponto de contacto, quer pela que se refere á sua direcção, achar-se-ha com facilidade a equação

$$y^2 = \frac{-x^3}{x + \frac{1}{2}m}$$

em que logo se reconhece a cissoide annunciava. Invertendo-se esta importante ligação entre duas curvas que se julgam de ordinario muito heterogeneas, poder-se-hia deduzir a parabola da cissoide, como tangente ao systema das perpendiculares tiradas em cada ponto desta ás cordas partidas da origem. Porem, esta inversão, em que seria preciso analyticamente voltar da equação geral das tangentes parabolicas, $y = ax + \frac{m}{4a}$, á da curva correspondente, exigiria necessariamente a analyse transcendente. De resto, uma tal connexão natural deve admirar pouco entre curvas que no fundo decorrem de uma mesma fonte geometrica ; pois que ja observamos, no começo deste capitulo, que a parabola pode derivar do circulo tão directamente quanto a cissoide, bem que segundo uma lei toda outra.

Quanto aos logares, de alguma sorte inversos, resultantes, ao contrario, da deslocação da parabola mesma em relação a certas tangentes, me limitarei a considerar, como typo, o que corresponderia ao vertice de uma parabola invariavel, deslocada de maneira a tocar constantemente duas rectas fixas que, para simplificar, supporei rectangulares. A apreciação directa de uma tal definição indica facilmente uma curva symetrica em torno das duas rectas e mesmo de suas bissectrizes, sobretudo considerando que a directriz deve, em razão da perpendicularidade dessas tangentes, passar sempre na sua intersecção. Mais attento exame demonstra tambem que as duas rectas devem ser asymptotas do logar procurado, pois que a sua rectangularidade a nenhu-

ma dellas permitte conter o vertice, sinão quando a out.a se tiver afastado ao infinito. Para achar a equação do logar, a marcha mais analytica consistiria em partir da equação focal da parabola, afim de formular os dous contactos e em seguida o parametro. A operação se abreviará um pouco, si, collo ando os eixos segundo as duas rectas fixas, observar-se a passagem necessaria da directriz á origem. A equação será assim

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(px+qy)^2,$$

suppondo-se nella $p^2+q^2=1$, visto o caracter parabolico. Bastará desde então exprimir o contacto com um dos eixos, o que dará a relação $(1-p^2)\beta^2=p^2\alpha^2$. Quanto ao parametro dado m, concebendo-o como o dobro da distancia do foco á directriz, ter-se-ha a nova condição $p\alpha+q\beta=\frac{1}{2}m$, que, combinada com as duas precedentes, permittirá eliminar p e q, conservando-se α e β. Sendo assim achado o logar do foco, deduzir-se-ha d'elle o do vertice, considerando este ponto como situado ao mesmo tempo sobre a curva e sobre a perpendicular tirada do foco á directriz.

Um outro modo, menos completamente analytico que o precedente, porem mais simples, e demais bastante geral para ser imitado com outra qua quer curva invariavel movida ao redor de duas rectas fixas, consistiria em proceder por inversão, suppondo immovel a parabola, afim de procurar, por meio da sua equação mais simples, a relação constante entre as distancias de seu vertice, de seu foco, ou de outro qualquer ponto singular, a duas tangentes rectangu ares quaesquer. Tomando-se para uma dellas a equação $y=ax+\frac{m}{4a}$, então eminentemente conveniente, a d a outra seria, pois, $y=-\frac{1}{a}x-\frac{ma}{4}$. Suas distancias, x', y', á origem, que afinal tornar-se-hiam, para com os eixos já indicados, as coodernadas do lugar do vertice, seriam expressas pelas duas formulas

$$x'=\frac{m}{\sqrt{m^2+16a^2}},\quad y'=\frac{ma}{\sqrt{a^2m^2+16}},$$

entre as quaes a eliminação do coefficiente variavel *a* facilmente forneceria a equação procurada.

Esta segunda solução, cuja principal vantagem consiste em dispensar espontaneamente de formular a invariabilidade da curva movel, poderia ser apresentada sob outra fórma essencialmente equivalente, por meio das formulas relativas á transposição dos eixos, exprimindo, na equação $y^2=mx$, assim generalisada, as duas condições de contacto em relação aos novos eixos, o que permittiria, pela eliminação das tres constantes auxiliares, obter uma equação final entre as novas coordenadas de um ponto qualquer, cujas antigas fossem conhecidas. Mas esta transformação analytica do modo precedente diminuiria a sua simplicidade, sem, no fundo, nada poder ajuntar á sua generalidade real.

102.—Todos os problemas sobre as tangentes podem suggerir outras tantas questões novas em relação á normal. Comquanto estas ultimas investigações sejam necessariamente sujeitas aos mesmos principios que as primeiras, o que dispensa de insistir muito sobre ellas, os seus resultados serão no entauto mais complicados. Assim, por exemplo, ao passo que o logar das intersecções das tangentes rectangulares é na parabola uma linha recta, o que corresponde ás normaes respectivas é uma linha curva, que eu encarrego o leitor de procurar. Limitar-me-hei a considerar especialmente o mais importante destes novos problemas, que consiste em tirar uma normal por um ponto qualquer do plano. A solução analytica reduz-se a determinar o ponto correspondente da parabola, por meio da equação desta curva, combinada com a condição $y'-\beta=\frac{-2y'}{m}(x'-\alpha)$ que exprime a passagem da normal ao ponto dado, α, β. Acha-se assim para a ordenada de incidencia a equação do terceiro grau

$$y'^3+m\left(\frac{m}{2}-\alpha\right)y'-\frac{1}{2}m^2\beta=0,$$

que indica algebricamente a existencia de uma só normal ou de tres, segundo as relações dos dados α, β. Estes dous casos ordinarios serão separados pelo excepcional de duas normaes, correspondente á igualdade de duas das raizes desta equação.

Procurando a relação entre α e β, necessaria para esta igualdade, quer segundo o methodo já empregado (43), quer segundo outro qualquer modo algebrico, achar-se-ha mais ou menos commodamente a equação

$$\beta^2 = \frac{16}{27m}\left(\alpha - \frac{m}{2}\right)^3.$$

Seu logar geometrico determinará uma curva, de um lado da qual poderão partir tres normaes, ao passo que do outro só se poderá tirar uma. Demais, é facil evitar todo despreso a este respeito, mesmo independentemente das noções algebricas especiaes, considerando-se que, si β fosse bastante pequeno e sobretudo nullo, seria certamente possivel tirar tres normaes. Ass m, a primeira região está situada entre os dous ramos desta curva auxiliar, e todo o resto do plano apresentará o outro caso. A curva, facil de reconhecer-se, pertence ao terceiro genero da familia geral das parabo as (79), pois que a equação torna-se binomia transportando-se a origem para G (*fig.* 71), onde começa necessariamente o logar HGH' ; é facil ver ficar que seu encontro com a parabola corresponde a uma abscissa OL octupla da do foco.

Uma sufficiente apreciação da definição precedente póde levar natura mente á mais importante propriedade desta curva auxiliar, a qual consiste em tocar ella todas as normaes da parabola, como já indica a equação para com a primeira dentre ellas, ou o eixo. Com effeito, si uma dellas penetrasse na sua concavidade, partiria evidentemente mais de uma normal de todos os pontos que ahi se achassem comprehendidos ; pois que, além d'aque la, existiria ao menos uma outra correspondente á metade adjacente da parabola. Ora, esta coexistencia tornar-se-hia directamente contraria ao destino geometrico de um tal logar, de cuja concavidade acabamos de mostrar que nunca poderia partir mais de uma normal. De resto, seria facil verificar analyticamente uma tal propriedade, procurando a principio a relação entre a e b, propria a tornar uma recta indeterminada, $y = ax + b$, normal á parabola $y^2 = mx$, por meio da assimillação

á equação primitiva da normal $y-y'=\frac{-2y'}{m}(x-x')$, procedendo-se como para as tangentes (43). A equação geral das normaes á parabola tornar-se hia assim finalmente, em relação á origem G, $y=ax-\frac{1}{4}ma^3$, e desde então se poderia sem difficuldade verificar pelos caminhos ordinarios que, qualquer que seja a, esta recta toca constantemente a curva auxiliar $y^2=\frac{16}{27m}x^3$.

Em virtude de uma tal propriedade, cada ponto deste logar poderia ser concebido como a intersecção de duas normaes infinitamente visinhas, conforme o que já sabiamos só pelo ponto inicial(100). Portanto, resultaria tambem, em relação a um ponto qualquer da parabola, a determinação do circulo o mais tangente possivel, precedentemente obtido só para com o vertice. E' assim que a analyse ordinaria pode esboçar, em certos casos, uma eminente pesquiza geometrica, aliás em essencia reservada por natureza á analyse transcendente, sem a qual de ordinario não poderia esta questão adquirir a clareza e a precisão que, por excepção, poude apresentar aqui para com a parabola.

103.—Importa apreciar agora uma terceira serie de propriedades essenciaes da parabola, as que se referem aos seus diametros. As principaes d'entre ellas foram já assignaladas na terceira parte deste tratado. por meio da equação geral; de sorte que bastará indicar como surgem ellas de um modo mais simples e claro da equação especial $y^2=mx$. Applicando-se-lhe o nosso segundo methodo dos diametros, ou mesmo o primeiro, ella conduz mui commodamente á equação $2au=m$, para um diametro qualquer, correspondente a cordas cujo coefficiente angular seja a. Vê-se assim directamente que todos os diametros da parabola são linhas rectas, parallelas ao eixo. Reciprocamente, toda paralle a ao eixo é um diametro, relativo a cordas parallelas á tangente tirada da unica intersecção delle com a curva; por que $a=\frac{m}{2u}$ indica o coefficiente angular da tangente que corresponde a uma ordenada u. O eixo é. pois, o unico diametro perpendicular ás suas cordas, e os outros são tanto mais obliquos ás suas quanto mais delle se afastam.

Quando trata-se de determinar a parabola por condições relativas aos diametros, é mister considerar que cada diametro dado, isolamente de suas cordas, indica só a direcção do eixo, de sorte que a multiplicidade de taes diametros nenhuma restricção nova poderia constituir. O mesmo, porem, já não acontece, quando tambem dá-se a direcção das cordas correspondentes. Então, cada um destes diametros fornece uma relação distincta, tang $\alpha = \frac{m}{2h}$, entre a distancia h deste ao iexo desconhecido e a obliquidade α das cordas. Uma segunda relação semelhante, tang $\alpha' = \frac{m}{2h'}$, determinaria m facilmente, bem como h e h' cuja differença é conhecida e igual á distancia dos dous diametros dados. Depois de assim ter obtido o eixo e o parametro da parabola, só ficaria arbitraria a posição especial do vertice, que taes condições nunca poderiam fixar, pois que todas as parabolas iguaes, collocadas sobre o mesmo eixo, têm necessariamente communs todos os diametros em relação aos mesmos systemas de cordas. Si alem disso, se desse neste caso um ponto da parabola ou uma tangente, facil seria completar sua determinação.

Pode-se com facilidade prever a forma que tomaria a equação da parabola, escolhendo-se para eixos um diametro qualquer e a tangente que lhe corresponde. De facto, devendo esta condição excluir todos os termos que contenham a primeira potencia da ordenada, o caracter parabolico, $b^2 - 4ac = 0$, exigiria de mais que, visto a ausencia dos $x'y'$, faltassem tambem os x'^2; emfim, a posição da origem sobre a curva supporia a desapparição do termo constante. Entre os seis termos proprios ás equaçães do segundo grau, só dous poderiam, pois, subsistir, e a equação conservaria necessariamente a mesma fórma, $y'^2 = m'x'$, que a respeito dos eixos que, neste ponto de vista, só se distinguem pela rectangularidade. Demais. seria facil prolongar esta previsão até determinar d'ante-mão o valor do parametro variavel m' por meio da posição do diametro correspondente, independemente de todo calculo de transposição de eixos. Com effeito, bastaria assim conhecer as novas coordenadas de um só ponto; ora, isto não apre-

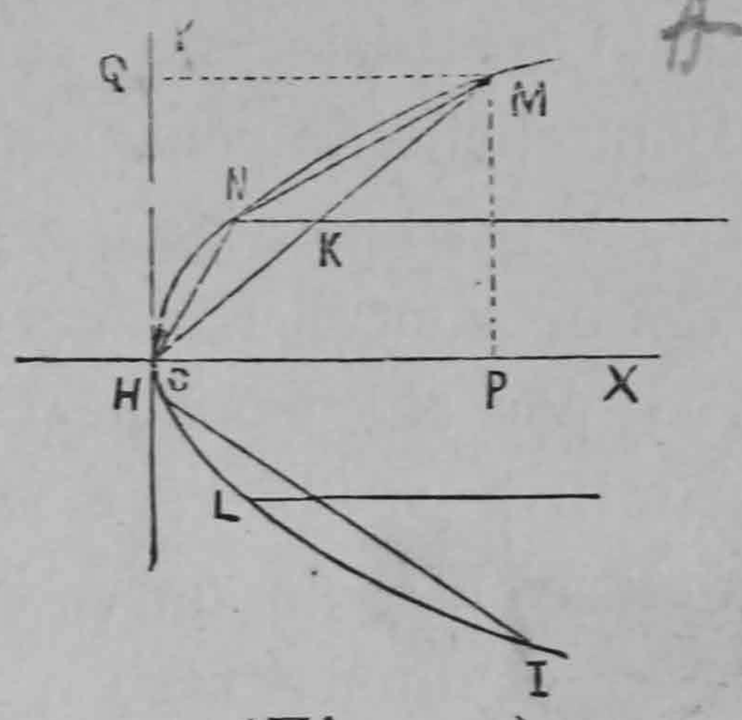
senta nenhuma difficuldade em relação ao vertice, do qual a construcção das tangentes dá logo $x'=a$ e $y'=\sqrt{b^2+4a^2}$, designando a e b as antigas coordenadas da origem actual; d'onde $m'=m+4a$. Todas estas indicações serão facilmente verificadas executando-se, segundo as formulas ordinarias, a passagem dos antigos eixos aos novos, de que uma dá $X'=0$ e a outra $\text{tang}\,Y'=\frac{m}{2b}$. A lei relativa á variação do parametro m' reduz-se evidentemente a concebel-o sempre como o quadruplo da distancia da origem corrsspondente ao foco ou á directriz; de sorte que o parametro principal m é o menor de todos, emquanto corresponde á origem mais proxima do foco. Bem d'outra sorte, fôra mister que o augmento continuo deste coefficiente compensasse a obliquidade crescente dos eixos que se lhe referem.

Esta nova equação deve necessariamente conduzir aos mesmos resultados que a antiga, para todas as determinações que não exigem a rectangularidade dos eixos. E' preciso sobretudo observal-o para com a tangente, quanto á extensão que assim adquire o theorema fundamental: a sub-tangente é o dobro da abscissa. A possibilidade da applical-o d'ora em diante a um diametro qualquer facilitará a construcção da tangente, primeiro quando é dado o ponto de contacto, e em seguida nos outros casos elementares. Mas a lei notavel propria a sub-normal não comporta semelhante generalisação, por isso que suppõe ordenadas perpendiculares.

Afim de resumir commodamente o conjunto das principaes propriedades da parabola, convem applical-as a uma questão, aliás util, cuja difficuldade reside toda na judiciosa combinação dellas. Consiste esta questão em construir todos os elementos geometricos de uma parabola por meio de uma porção traçada da sua circumferencia. Qualquer que seja este arco, poder-se-ha tirar n'elle duas cordas parallelas, cujos meios determinarão logo um diametro, e por conseguinte a direcção do eixo, de sorte que bastaria achar um ponto deste. Ora, o foco pode ser facilmente obtido; porque, devendo ser tangente a parallela a essas cordas, tiradas na intersecção d'aquelle diametro com o arco dado, a propriedade caustica da parabola indicará logo uma recta que vai ao focoprocurado. E' facil construir uma segunda tangente, e desd

então um segundo logar semelhante, quer da mesma maneira, quer pela sub-tangente. Sendo assim achado o foco, deduzir-se-ha facilmente o eixo, o vertice, a directriz e o parametro.

104. — Para completar o estudo da parobola, nada mais resta que considerar o que se refere á sua quadratura, á qual os nossos methodos convêm directamente. Segundo a regra geral (71), o segmento parabolico OMP (*fig.* 72) será os dous terços do rectangulo OMPQ formado pelas cordas extremas, e o segmento OMQ será o terço deste rectangulo. Sob ésta ultima forma, o resultado poderia ser obtido directamente, sem recorrer ao methodo analytico, com o auxilio de uma comparação especial que devo assignalar. Consiste ella em notar que, crescendo aqui as abscissas como os quadrados das ordenadas, os elementos rectangulares do segmento OMP seguem a mesma lei que os elementos prismaticos de uma pyramide de igual altura, semolhantemente decomposta por secções equidistantes. Basta estender esta constante analogia aos limites respectivos das duas sommas elementares, para concluir que a quadratura do segmento parabolico equivale numericamente á cubatura da uma pyramide da mesma altura e de base numericamente equivalente. Desde então, a regra conhecida sobre a medida da pyramide conduz logo á deste segmento, pelo terço do producto da base pela altura, conforme a theoria analytica.



(*Fig.* 72)

Archimedes descobriu este importante resultado sob uma fórma que merece ser conservada, considerando a area ONM comprehendida entre o arco parabolico OM e sua corda. Esta area deduz-se facilmente do segmento OMP $= \frac{2}{3} x y$, subtrahindo o triangulo OMP ou $\frac{1}{2} x y$. Ora, em logar de comparar o resto $\frac{1}{6} x y$ ao rectangulo OMPQ, Archimedes tinha sido naturalmente levado a introduzir o triangulo NOM da mesma base OM que o segmento, e cujo vertice era collocado no ponto em que a tangente é parallela a esta

base commum, isto é, na intersecção da parabola com o diametro correspondente á corda OM. Este ponto M era então com bastante justiça chamado o *vertice* proprio do segmento parabolico ONM. Operando tal comparação, o leitor reconhecerá sem difficuldade que este segmento é os $\frac{4}{3}$ do triangulo correspondente. A utilidade permanente de um tal enunciado consiste na sua extensão espontanea á area HIL comprehendida entre nm arco qualquer da parabola e a sua corda. Qualquer que seja a origem H deste arco, basta, com effeito, conceber a curva referida ao diametro e á tangente que por ahi passam. Como a equação conserva então a fórma primitiva $y^2=mx$, a relação deduzida d'esta ainda continúa applicavel, pois que, demais, o methodo das quadraturas de modo nenhum exige a rectangularidade dos eixos. Assim, oa segmento parabolieo HIL é sempre os $\frac{4}{3}$ do triangulo da mesma base e do mesmo vertice.

A nossa theoria das quadraturas fornece commodamente a medida dos principaes volumes produzidos pela revolução da paraboia, quer gyre o segmento OMP em torno de OX, quer o segmento OMQ em torno de OY. Segundo a lei de reducção $z=y^2$, a primeira cubatura depende da quadratura da linha $z=mx$, d'onde, em virtude da regra ordinaria, resulta $V=\frac{\pi x}{2}$. Comparando este volume ao do cylindro produzido pela revolução do rectangulo OMPQ, enuncia-se geometricamente este resultado dizendo que o paraboloide é metade do cylindro da mesma base e da mesma altura. Quanto ao volume gerado pelo segmento convexo OMQ em torno da tangente ao vertice, convem, afim de não alterar sem motivo a notação habitual da nossa regra, em que se suppunha coincidir o eixo de revolução com o dos x, inverter a situação e a equação da parabola. Desde então, segundo a equação $x^2=my$, a lei de reducção dá aqui $z=\frac{x^4}{m^2}$ para a curva auxiliar cuja quadratura deve determinar o volume procurado, que assim se ach

expresso por $V = \frac{\pi x^3}{5m^2}$. Semelhantemente comparado ao cylindro circumscripto, elle é sómente igual a $\frac{1}{5}$ deste cylindro.

Destas duas cubaturas, igualmente a cessiveis aos nossos methodos actuaes, só a primeira t nha sido executada por Archimedes, e póde-se assegurar que a geometria antiga não permittia achar a segunda. Isto é muito proprio para fazer sentir a superioridade da marcha analytica, que, mesmo com recursos tão limitados como os empregados aqui a este respeito, comporta espontaneamente uma variedade de applicação geometrica necessariamente interdicta aos mais eminentes esforços do genio antigo.

A combinação destes dous resultados permitteria determinar facilmente, por meio da regra de Guldin, o centro de gravidade do segmento OMP, cujas coordenadas serão assim $x_1 = \frac{3}{5}x$, $r_1 = \frac{3}{8}r$.

CAPITULO III

THEORIA DA ELLIPSE

105.— Uma vez reduzida á forma $px^2 + qy^2 = 1$, sendo p e e q positivos, a equação da ellipse indica mui claramente a figura geral desta curva composta de quatro partes identicas, estendendo-se de um ao outro eixo, aproximando-se do segundo á medida que afasta-se do primeiro. Entre estes dous limites, a distancia ao centro augmenta ou diminue sem cessar, de sorte que os vertices da ellipse são os pontos mais proximos ou os mais afastados do centro, como, demais, o confirma a marcha das tangentes, segundo o coefficiente angular $\text{tang}\,\alpha = -\frac{px}{qy}$, nullo ou infinito nas extremidades de cada quarto. Por este motivo, os diametros

frectangu'ares corr ꝑpondentes a estes vertices são com justiça qualificados de *grande eixo* e *pequeno eixo*. Habitualmente acilitar-se-ha a interpretação geometrica da equação introdu-do-os nella como coefficiente em logar das constantes puramente abstractas p e q. Designando-se as metades d'elles por a e b, as quaes indicam, pois, os maiores valores das coordenadas respectivas, ter-se-ha $p=\frac{1}{a^2}$, $q=\frac{1}{b^2}$, e a equação se escreverá

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ou } a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Estas duas dimensões caracteristicas, cuja relação é a mesma em todas as ellipses semelhantes, são necessariamente desiguaes, a menos que a ellipse torne-se circular: sempre supporemos $a>b$.

Si desta equação se quizesse deduzir a descripção da curva por pontos, bastaria tirar $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, para construir esta formula pelos meios ordinarios. Mas póde-se effectuar esta construcção sob uma fórma igualmente simples e luminosa que importa apreciar, comparando a ordenada da ellipse, á igual abscissa, com a ordenada z do circulo circumscripto do qual o grande eixo fosse o diametro. Porquanto assim ter-se-hia

$$y : z :: b : a;$$

d'onde segue-se que a ellipse deriva do circulo diminuindo-se proporcionalmente todas as ordenadas relativas a um mesmo diametro. Tal reducção opera-se espontaneamente, quando se projecta o circulo sobre um plano que, para mais facilidade póde-se sempre suppôr tirado do centro. Na verdade, referindo-se as duas curvas ao diametro commum, resultante da intersecção dos seus planos, as ordenadas da segunda serão as projecções das da primeira sob uma mesma obliquidade, cuja coseno indicará a relação dos dous eixos da ellipse assim produzida. O mesmo circulo, diversamente projectado, póde, pois, fazer nascer ellipses de todas as formas, mas não de todas as grandezas, por serem os grandes eixos sempre iguaes ao diametro do circulo.

Si se comparasse a ellipse ao circulo inscripto, tendo o pe-

queno eixo por diametro, achar-se-hia igualmente, á igual ordenada, uma relação constante entre as obscissas x e t: de sorte que a ellipse deriva do circulo augmentando-se proporcionalmente todas as ordenadas relativas a um mesmo diametro, tão bem como diminuindo-se.

Segundo esta dupla comparação, a construcção da ellipse por pontos, quando são dados os dous eixos, opera-se facilmente com auxilio dos dous circulos correspondentes. Basta prolongar cada parallela a um ou ao outro eixo até o circulo circumscripto, e projectar em seguida sobre esta parallela a intersecção do circulo inscripto com o raio tirado desta extremidade.

Uma simples transposição da proporção precedente,

$$y : \sqrt{a^2 \mp x^2} :: b : a,$$

conduz a uma outra descripção da ellipse, por um movimento continuo muito simples. De facto, sendo ella assim

$$y : b :: \sqrt{a^2 - x^2} : a,$$

indica directamente que de cada ponto da ellipse póde-se tirar entre os dous eixos uma recta de que as duas partes sejam invariavelmente iguaes a b e a a. Assim, reciprocamente, quando uma recta invariavel escorrega entre dous eixos rectangulares, cada um de seus pontos descreve um quarto de ellipse, cujos semi-eixos são respectivamente iguaes ás partes oppostas de seu comprimento: seria facil que, com effeito, o meio descreve um circulo.

Esta antiga geração da ellipse deve hoje ser encarada como caso particular de uma notavel descripção, que convém caracterisar aqui summariamente. Emquanto uma recta invariavel escorrega entre dous eixos rectangulares, qualquer ponto que se lhe achar invariavelmente ligado, descreve tambem uma ellipse do mesmo modo que os proprios dous pontos da recta. Como sempre póde suppor-se este ponto gerador determinado pelas distancias delle aos extremos da recta movel, a questão reduz-se a achar o logar de um dos vertices de um triangulo invariavel, do qual os outros dous descrevem duas linhas dadas, que aqu

suppomos consistirem em duas rectas rectangulares, afim de limitarmo-nos ao unico caso interessante de uma investigação analytica aliás de facil generalisação. Tomando-se estas duas rectas para eixos, em virtude da evidente symetria do conjuncto do logar em torno de cada uma dellas, e introduzindo-se como coordenadas naturaes, ou a titulo de variaveis auxiliares, a ordenada β e a abcissa α das extremidades da base a do triangulo dado, ter-se-ha para equação espontanea $\beta^2+\alpha^2=a^2$, da qual é mister eliminar α e β por meio das distancias b e c do ponto descrevente aos dous extremos desta base, segundo as condições evidentes $(x-\alpha)^2+y^2=c^2$, $(y-\beta)^2+x^2=b^2$. D'ahi resulta sem difficuldade a equação rectilinea

$$2x\sqrt{c^2-y^2}+2y\sqrt{b^2-x^2}=b^2+c^2-a^2,$$

cujo segundo membro tornar-se-hia monomio, introduzindo-se o angulo do vertice, segundo a relação geometrica ordinaria. Assim, esta equação toma a fórma a mais commoda

$$x\sqrt{c^2-y^2}+y\sqrt{b^2-x^2}=bc\cos A.$$

A suppressão dos radicaes eleval-a-hia ao quarto gráu; mas, como cada um d'el es só affecta a uma variavel. bastaria para a discussão eliminar um, por exemplo, do primeiro, o que daria a equação

$$c^2x^2=c^2b^2\cos A+b^2y^2-2bcy\sqrt{b^2-x^2}\cos A,$$

d'onde tira-se facilmente a formula da ordenada

$$y=\frac{c\sqrt{b^2-x^2}\cos A\pm\sqrt{c^2x^2-c^2x^2\cos^2 A}}{b}.$$

Importa aqui observar o accidente analytico sobrevindo ao segundo radical que evidentemente torna-se racional e igual a $cx\,\mathrm{sen}\,A$. Esta circumstancia indica, algebricamente, que a nossa equação do quarto gráu é realmente decomponivel, contra a natureza ordinaria das equações a duas variaveis, em dous factores do segundo gráu; donde. geometricamente, resulta a duplicidade do logar procurado que, longe de constituir uma verdadeira curva do quarto gráu, apenas decompõe-se, pois, na reunião de

duas ellipses. Um tal caracter, no qual reside o nó principal da questão actual, era aliás facil prever-se, pensando na dupla situação que póde evidentemente tomar o triangu o dado em torno de cada posição da sua base; de sorte que esta indicação necessaria teria sufficientemente annunciado um par de ellipses, logo que o calculo tivesse podido assignalar uma equação final do quarto grau. Proseguindo-se na analyse precedente, acha-se faci mente

$$b^2y^2+c^2x^2+2bc\,xy\,\text{sen A}=b^2c^2\cos^2 \text{A},$$

para a dupla equação elliptica. Conclue-se, segundo as regras estabelecidas no ultimo capitulo da terceira parte, que estas duas ellipses concentricas são iguaes e symetricamente collocadas em torno dos eixos coordenados, conforme as exigencias geometricas de uma tal geração. A formula $\text{tang } 2X'=\frac{+}{-}\frac{2bc\,\text{sen A}}{c^2-b^2}$, que determina as direcções respectivas de seus eixos principaes, confirma directamente esta mutua disposição, mostrando que os dous pares de direcções rectangulares que dahi resultam correspondem a angulos mutuamente complementares ou supplementares, segundo os sentidos da comparação. O leitor ahi achará, demais, facilmente as indicações já conhecidas relativamente aos dous casos extremos, em que o triangulo torna-se rectangulo ou reduz-se á sua base.

Em fim, a apreciação geometrica da equação fundamental da ellipse conduz, sob um novo aspecto, a uma relação notabilissima, que a caracterisa essencialmente, entre as direcções das duas cordas ditas *supplementares*, que partindo de um mesmo ponto, porem qualquer, da curva, toquem em dous pontos diametralmente oppostos. A constante rectangularidade destas cordas no circulo é, em relação a uma ellipse arbitraria, substituida pela invariabilidade do producto das tangentes de suas inclinações sobre qualquer dos eixos. Chamando-se x', y' as coordenadas do ponto de partida commum, e x'', y'' as de um dos pontos de chegada, estas tangentes, estimadas quanto ao grande eixo, e desde então iguaes aos coefficientes angulares das duas cordas, serão expressas, segundo a regra ordinaria, pelas fracções $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ e $\frac{y'+y''}{x'+x''}$ cujo producto é $\frac{y'^2-y''^2}{x'^2-x''^2}$. Ora, tendo

agora em vista a equação da curva, que dá as duas relações $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, $a^2y'' + b^2x''^2 = a^2b^2$, reconhece-se facilmente, por meio da simples subtracção dellas, que o producto tang β.tang β' é sempre igual a $-\frac{b^2}{a^2}$. Haveria uma especie de pleonasmo ou pelo menos uma falta real da elegancia em mencionar no enunciado habitual deste theorema aquelle valor do producto constante; porque, uma vez que é elle proclamado invariavel, o seu effectivo valor resulta necessariamente de um par qualquer de cordas cuja direcção seja facilmente apreciavel, e sobretudo das que unem entre si os quatro vertices. Quando a ellipse torna-se equilatera, tem-se tang β tang β'$=-1$, conforme a rectangularidade conhecida das cordas supplementares do circulo.

Em qualquer ellipse, a inclinação destas cordas varía necessariamente, segundo a formula $\text{tang}V = \frac{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\beta'}{1+\text{tang}\,\beta\,\text{tang}\beta'}$, cujo denominador é constante, sem que possa sel-o o numerador. Sendo sempre oppostos pelos signaes os factores tang β e tangβ', o numerador, e por conseguinte tang V, varia proporcionalmente á somma dos valores numericos destes factores. Ora, sendo constante o producto delles, o *mimimum* da somma deve corresponder á sua igualdade, invertendo-se um theorema elementar de algebra sobre o *maximum* de um producto de factores cuja somma é constante. Como evidentemente convém esta igualdade ás cordas da extremidade de um dos eixos aos extremos do outro, o losango dos quatro vertices indica, pois, o maior angulo obtuso ou o menor angulo agudo que na ellipse possam formar duas cordas supplementares quaesquer, cuja inclinação pode assim tanto mais variar quanto mais se afasta a curva da figura circular.

106. — Appliquemos agora á ellipse a nossa theoria dos focos sob a forma subsidiaria conveniente á equação actual, como para com a parabola. Substituindo-se y em x na formula $d^2 = y^2 + x^2 - 2\beta y + 2\alpha x + (\beta^2 + \alpha^2)$, toma ella a forma

$$d^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2 - 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - 2\alpha x + (\beta^2 + \alpha^2),$$

o que exige previamente $\beta = 0$, para que desde logo seja racional. Assim tornada em

$$d'^2=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2\alpha x+(\beta^2+\alpha^2),$$

só será quadrado quando se fizer $\alpha=\pm\sqrt{a^2-b^2}$. Existem, pois, sobre o grande eixo da ellipse dous focos symetricamente collocados, dos quaes a distancia commum ao centro, de ordinar o qualificada de *excentricidade* e de commum designada por c, forma com a metade do pequeno eixo um triangulo rectangulo que tem por hypothenusa a metade do grande eixo, o que permitte distinguil-as facilmente. Si, ao contrario, se tivesse substituido x em y, o resultado teria sido por evidente analogia, $\alpha=0$, $\beta=\sqrt{b^2-a^2}$, que só seria admissivel si b excedesse a a; de sorte que os focos da ellipse nunca podem estar situados sinão sobre o grande eixo. Elles só coincidem um com o outro e com o centro no caso do circulo.

Acabando-se a operação precedente, as distancias racionaes destes focos a qualquer ponto da curva são expressas pelas duas formulas

$$d'=a-\frac{c}{a}x,\quad d''=a+\frac{c}{a}x,$$

cuja confrontação faz logo sobresahir a principal propriedade especial da ellipse, mostrando a invariabilidade da somma destas duas distancias variaveis. E' inutil mencionar expressamente o valor effectivo desta somma constante, pois os vertices do grande eixo, e mesmo os do pequeno, o determinam immediatamente, desde que é reconhecida a sua constancia. De resto, seria superfluo parar aqui nos meios evidentes que espontaneamente fornece um tal theorema para descrever commodamente a ellipse, quer por pontos, quer por movimento continuo, a qual pode assim receber diversas formas geometricas.

Quanto ás directrizes correspondentes a estes dous focos, a annullação daquella dupla formula assigna-lhes, segundo as nossas regras geraes, a dupla equação $x=\pm\frac{a^2}{c}$, que indica duas perpendiculares ao grande eixo alem do vertice, em posição que se constróe com facilidade. A relação especifica é aqui $\frac{c}{a}$ e por conseguinte menor que 1, conforme a theoria fundamental.

Vê-se que a principal differença entre a ellipse e a parabola, relativamente aos focos e ás directrizes, consiste na actual dualidade d'elles opposta á unidade primitiva; este contraste está naturalmente em harmonia necessaria com a existencia ou ausencia de um centro ou de um segundo eixo.

Estendendo-se á ellipse o problema já resolvido para com a parabola (99), que consiste aqui em determinar uma ellipse por meio de um foco e tres pontos, elle adquire ainda maior importancia astronomica, como directamente relativo á verdadeira figura media das orbitas planetarias. A solução graphica, que sempre consiste em construir logo a directriz correspondente, resultará de que as distancias desta recta aos tres pontos dados são então proporcionaes ás distancias conhecidas destes pontos ao foco dado. Ora, cada uma destas duas proporções, isoladamente encarada, determina a intersecção da directriz com a recta de juncção dos pontos respectivos, e facil é reconhecer, segundo um theorema elementar já empregado (21), que este encontro se acha sobre a bissectriz do supplemento do angulo formado pelas duas rectas que vão destes pontos ao foco. Sendo assim obtida a directriz por meio de dous de seus pontos, será facil acabar a construcção, traçando a principio o eixo focal, depois seus dous vertices e o centro, d'onde resultarão logo o outro foco, a outra directriz e o outro eixo. Quanto aos casos de impossibilidade, só poderiam resultar da confusão do foco com um dos pontos, ou da disposição destes em linha recta, quer entre todos tres, quer só entre dous e o foco do mesmo lado. Esta construcção manifestal-os-hia pela passagem da directriz obtida, ora no foco, ora em um dos pontos.

Facilmente se instituirá a solução analytica d'este problema, como na parabola, por meio da equação focal

$$y^2+x^2=(px+qy+r)^2,$$

si collocar-se a origem no foco dado. Demais, dirigindo-se o eixo dos x a um dos pontos, têm-se, para determinar as tres incognitas p, q, r, as tres relações

$$y'^2+x'^2=(px'+qy'+r)^2,\quad y''^2+x''^2=(px''+qy''+r)^2,$$

$$x'''^2=(px'''+)^2,$$

que tambem poderão ser reduzidas ao primeiro grau sob as formas

$$px'+qy'+r=u',\quad px''+qy''+r=u'',\quad px'''+r=u''',$$

em que u', u'', u''', designam semelhantemente as distancias do foco aos pontos dados.

Si se escolhesse r como incognita principal, d'onde ainda resultaria, bem que menos directamente que para com a parabola, a distancia $\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2}}$ do foco á directriz, os diversos casos de impossibilidade, sendo todos de natureza precisa. não poderão igualmente manifestar-se sinão em virtude dos valores reaes inadmissiveis, que o exame de cada um delles faria prever com facilidade.

Pouco insisto aliás sobre a discussão especial, quer graphica, quer algebrica, de um tal problema, que deve naturalmente ser retomado e completado, quando tratar-se da hyperbole. Só então é que a sua natureza se tornará plenamente apreciavel, sendo concebido como necessariamente commum ás tres curvas do segundo grau.

Entretanto, o emprego da equação polar relativa ao foco deve ser mencionado aqui,como na parabola,em razão da sua importancia astronomica. Segundo o n. 23, esta equação será

$$u=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos(\varphi+\alpha)},$$

contando-se os angulos a partir de um eixo inclinado de α sobre o eixo focal da ellipse, e chamando-se e, segundo o uso astronomico, a relação especifica $\frac{c}{a}$; porque, a distancia d (*) do foco á directriz é aqui $\frac{a(1-e^2)}{e}$, em quanto igual á differença de suas distancias respectivas $\frac{a^2}{c}$ e c ao centro. Si têm-se em vista os

---

(*) Por analogia com theoria da parabola, o dobro d'esta distancia é tambem algumas vezes qualificado de PARAMETRO da ellipse, como constituindo o coefficiente do termo do primeiro grau na equação

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

em que a origem está collocada no vertice. Este parametro é, de uma e outra parte, igual ao dobro da ordenada relativa ao foco. Sus dous caracteres—analytico e geometrico—convêm igualmente a hyperbole.

tres pontos dados, dos quaes pode suppor-se que um esteja sobre o eixo polar, esta equação permittirá facilmente determinar a principio α, depois e e em fim a, que caracterisam a direcção, a forma e a grandeza da ellipse procurada, salvo os embaraços da execução trigonometrica

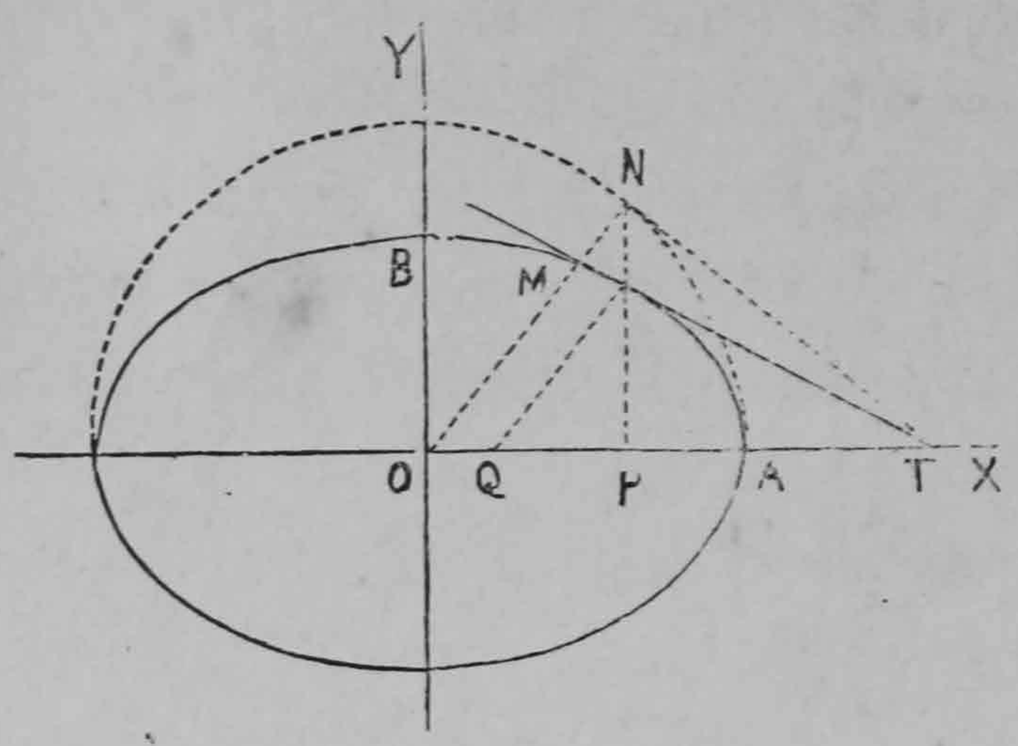
Substituindo-se o foco dado pela directriz, não será mais difficil do que na parabola resolver o poblema precedente, quer analyticamente, o que é evidente, quer mesmo graphicamente. De facto, afim de achar o foco correspondente, cada uma das duas combinações binarias dos tres pontos dados fornecerá ainda espontaneamente, bem que de outra maneira, um logar circular em virtude da proporcionalidade das distancias respectivas do foco procurado a estes diversos pontos, comparadas com as distancias conhecidas destes pontos á directriz dada. A construcção indicada no fim do n. 12 deduzirá assim dos dous pontos combinados um circulo que tem para diametro a parte da recta de juncção, comprehendida entre a directriz e o ponto que divide o intervallo d'elles proporcionalmente ás suas distancias a esta linha e que pode ser facilmente determinado. Uma vez obtido o foco pelo encontro de dous circulos taes, acabar-se-ha a construcção tão facilmente como acima. Alem dos casos precisos de impossibilidade attinentes á passagem da directriz em um dos trez pontos, ou á disposição rectilinea destes, taI solução indicaria demais, como na parabola, casos vagos correspondentes á não intersecção dos circulos: a solução analytica deveria reproduzir uns e outros, segundo a natureza respectiva d'elles.

107.— Consideremos agora as propriedades da ellipse quanto ás tangentes, segundo a equação

$$y-y'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x'),$$

que a nossa theoria geral attribue á recta que toca a curva em um ponto $x'.y'$. Deduz-se facilmente $x=\frac{a^2}{x'}$ para abscissa do ponto em que a tangente encontra o eixo; d'onde resultaria uma construcção facil, que se tornará mais simples ainda e sobretudo mais elegante, si se observa que este resultado, independente de b e de y, se conservaria identico para todas as

ellipses do mesmo grande eixo, considerando-se pontos de contactos situados sobre a mesma ordenada: sendo o circulo uma destas ellipses, a construcção especial da tangente d'elle conduzirá á de todas as outras. Assim, prolongando-se a ordenada M P (*fig. 73*) do ponto dado até o circulo circumscripto, e tirando-se d'esta extremidade N a perpendicular NT ao raio correspondente, o ponto T em que ella encontrar o eixo convirá igualmente á tangente procurada MT: com effeito, a figura confirma que a distancia OT equivale a $\frac{a^2}{x'}$.



(*fig. 73.*)

D'esta primeira determinação resultarão a sub-tangente, $TP = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$, e a sub-normal, $PQ = \frac{b^2}{a^2} x'$. Em vez de ser esta constante como na parabola, é agora proporcional á abscissa do ponto de contacto; o seu limite $\frac{b^2}{a}$ será sempre a metade do parametro; indicará igualmente o raio do circulo que tiver em A o mais intimo contacto com a ellipse. Da mesma sorte achar-se-hia $\frac{a^2}{b}$ para raio de um tal circulo em relação ao outro vertice B, onde se vê assim que é menor a curvatura.

A apreciação geometrica do coefficiente angular da tangente conduz a um theorema notavel, generalisando-se para qualquer ellipse a lei relativa do circulo. Na verdade, a simples confrontação do coefficiente $\frac{-b^2 x'}{a^2 y'}$ com o do raio correspondente $\frac{y'}{x'}$ mostra logo que o seu producto é sempre igual a $\frac{-b^2}{a^2}$. Aqui não bastaria a indicação da constancia, e convem mencionar habitualmente o valor effectivo do producto, que nenhum caso particular indicaria facilmente. Quando a ellipse é equilatera, este theorema reproduz espontaneamente a perpendicularidade conhecida da tangente ao raio.

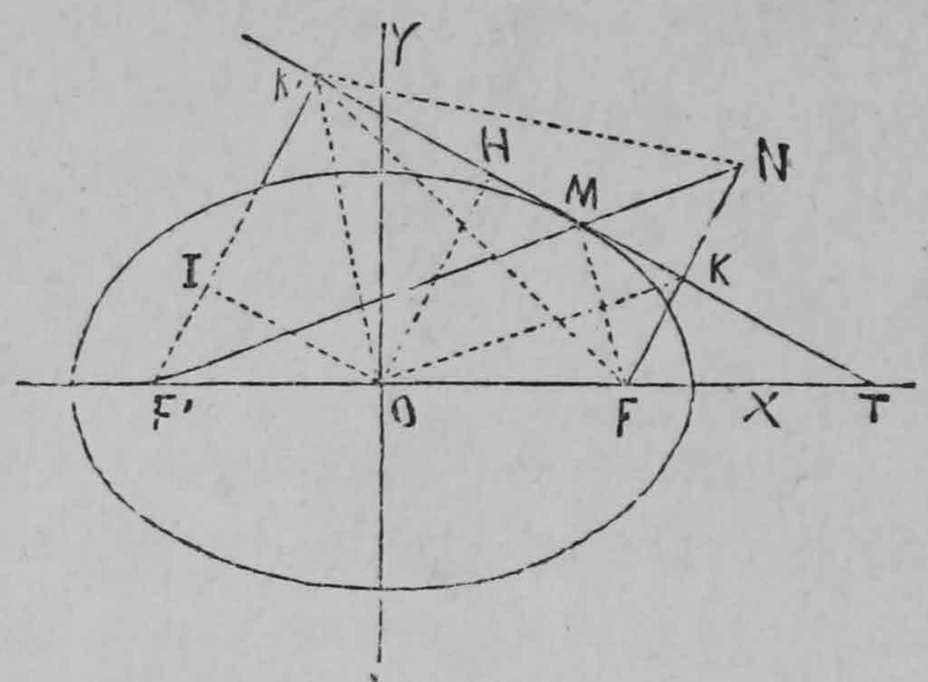
Esta relação torna-se a um tempo mais importante e luminosa, si é aproximada da lei analoga relativa ás cordas supplementares. Tendo o producto constante, das duas partes, o mesmo valor, segue-se que os dous pares assim formados, já por duas cordas supplementares quaesquer, já por uma tangente e seu raio, podem sempre tornar-se parallelos, e devem offerecer iguaes variedades de inclinação. D'ahi resulta logo um modo facillimo de traçar a tangente por meio do ponto de contacto ou da direcção della, pelo menos fazendo-se intervir a ellipse na construcção.

A proposito desta aproximação, convem notar que o theorema proprio á tangente não constitue no fundo, sinão um simples caso particular do das cordas supplementares, que, com effeito, basta levar até o seu limite natural. Si, conservando-se fixos os pontos de chegada das duas cordas, faz-se aproximar indefinidamente de um delles o ponto de partida commum, devendo ficar invariavel o producto dos coefficientes angulares, o seu valor não poderia mudar quando, pela coincidencia final, uma das cordas se confundisse com o raio. Assim vê-se como o theorema das cordas supplementares. cuja especial importancia é de commum muito pouco sentida, conduziria sem custo á equação da tangente á ellipse, independentemente de qualquer methodo geral.

A relação da tangente aos focos, eminentemente natural para os antigos, não surge aqui da equação tão directamente como na parabola, mas com muita differença, e, si o nosso estudo analytico da ellipse fosse historicamente original, talvez se ignorasse ainda esta propriedade, por não termos sido levados espontaneamente á combinação algebrica correspondente, que os modernos realmente só empregam para verifical-a. Quanto ao mais, esta verificação é facilmente executavel sob as tres formas geometricas em essencia equivalentes, que um tal theorema comporta. Sua accepção mais conhecida e a mais directa entre os antigos, consiste em ser a tangente á ellipse igualmente inclinada sobre as duas rectas que unem o ponto de contacto aos dous focos. E' facil proval-o por meio dos coefficientes angulares destas rectas, por quanto achar-se-ha assim, feita a reducção, para uma das inclinações a expressão tang $V = \frac{b^2}{cy}$, que, mudando de sig-

nal e não de valor para o outro foco pela mudança de c em $-c$, indicaria naturalmente uma tal relação, si tal aproximação fosse assás motivada. Como na parabola, este theorema, interpretado physicamente, explica logo, quanto á luz ou ao calor ou mesmo ao son no caso actual, a propriedade de concentração pela reflexão que espontaneamente recorda o nome de foco: as emanações de um d'estes serão assim reflectidas para o outro, quer na ellipse, quer no ellipsoide, alongado, resultante da sua rotação sobre o eixo focal·

Sob a segunda forma, consiste esta propriedade em ser um circulo o logar das projecções dos focos de uma ellipse sobre suas tangentes. Facil é apanhar a filiação geometrica das duas relações, considerando-se que, segundo a notação precedente, uma tangente qualquer MT (*fig.* 74), devendo ser a bissectriz do angulo NMF formado por um dos raios vectores com o prolongamento do outro, será perpendicular ao meio de NF, que une um dos focos ao ponto N obtido prolongando-se o raio vector MF' de um comprimento igual a MF. Ora, a propriedade mutua dos dous focos indica para logo que a proje ção K do foco F sobre a tangente cahe a uma distancia constante do centro, pois que esta distancia OK é evidentemente metade de F'N, assim sempre igual a $2a$.



(*fig.* 74)

Como, sem duvida, esta segunda forma constituiria, do ponto de vista moderno, a fonte mais natural do theorema de que se trata, creio dever indicar distinctamente a sua explicação analytica. Convem então preferir para a tangente a equação $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, que o principio das raizes iguaes fornece directamente, e que, independente do ponto de contacto, está mais bem adaptada que a nossa equação primitiva a toda especulação estranha á posição especial deste ponto. A perpendicular tirada do foco será, pois, representada pela equação $y = -\frac{1}{m}(x - c)$ que permittirá eliminar m com facilidade, de maneira a formar a equação

do logar das projecções do foco sobre as tangentes. Achar-se-ha assim que é ella do quarto grau, mas biquadrada, e desembaraçando-se r^2, reconhecer-se-ha, depois das convenientes reducções, ser ella o producto de duas equações, do segundo grau, $y^2+x^2-a^2=0$ e $y^2+(x-c^2)=0$, das quaes a segunda nenhuma linha fornece, e a só primeira indica a curva procurada, que é evidentemente o circulo circumscripto á ellipse.

Emfim, a terceira forma geometrica dessa relação das tangentes para os focos consiste em que são inversamente proporcionaes as distancias dos dous focos a uma tangente qualquer, sem que se faça mister mencionar expressamente o valor effectivo do producto constante destas distancias, espontaneamente evidente nos quatro vertices, sobretudo nos do pequeno eixo, em que são iguaes os dous factores. Para ver como este theorema, aliás de facil demonstração analytica, deriva do precedente, basta tirar do centro uma parallela OI e uma perpendicular OH ou q á tangente. Então, chamando-se p e p' as distancias FK e F'K' dos focos a essa tangente, uma proporção elementar bem conhecida, consequencia immediata do theorema de Pythagoras, dará logo, no triangulo OF'K' e para com o lado OF' ou c, a relação

$$c^2=p'^2+a^2-2p'q,$$

pois que o lado OK' é reconhecido ser sempre igual a a. Ora, sendo a distancia auxiliar q a media entre p e p', esta relação torna-se a final $pp'=a^2-c^2=b^2$, segundo o enunciado acima.

D'estas tres formas equivalentes de uma mesma lei, a primeira é a mais adaptada á construcção da tangente, quer por meio do ponto de conctato, quer pela direcção d'ella, quer em fim por um ponto exterior. Quanto ao primeiro caso, basta, como acima se viu, tirar do ponto dado M uma perpendicular á linha FN, precedentemente definida. Pode-se provar com facilidade, ao modo dos antigos, que todos os outros pontos desta recta serão exteriores á ellipse, em quanto equidistantes de F e de N, pois que a somma das distancias d'elles aos focos, assim equivalente, para ada um delles K', a K'F'+KN, excederá evidentemente ao grande eixo que esta constru ção representa por F'N. Esta consequencia é de tal sorte espontanea que, na ellipse como na parabola, a descober-

ta de semelhante propriedade das tangentes teve de ser facil aos antigos, uma vez que conheceram o theorema fundamental sobre os focos.

Si for preciso tirar uma tangente parallela a uma recta dada, a inversão desta construcção fará achar sem difficuldade o ponto N, d'onde tudo decorre, omo situado sobre uma perpendicular tirada a esta recta de um dos focos, e sobre o circulo descripto do outro com o raio $2a$. Do mesmo modo, quando se der um ponto exterior K', semelhantemente o circulo servirá para determinar aquelle ponto N, pela intersecção com um outro circulo descripto de K' com o raio K'F Nestes dous casos, poderá acabar-se a construcção, comprehendida mesmo a determinação dos pontos de contacto, sem nenhuma participação da curva.

A solução analytica destes dous problemas não merece que nos demoremos com ella. Só indicarei, quanto ao ultimo, uma transformação analoga á que já foi considerada na paraboìa, tendente tambem a determinar a corda que une os dous pontos de contacto procurados. Si, na equação

$$\beta - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(\alpha - x'),$$

que, combinada com $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, deve então fornecer as coordenadas incognitas x' e y' por meio das conhecidas α e β, si considerassem as primeiras como variaveis, o logar correspondente seria naturalmente elliptico e, desde então, graphicamente inadmissive . Mas, tendo em vista a segunda condição, a primeira pode abaixar-se ao primeiro grau e torna-se, sob a forma

$$a^2\beta y' + b^2\alpha x' = a^2b^2,$$

a util equação da corda de contacto, cuja construcção conduziria commodamente á solução graphica do problema, si se admittisse a participação da ellipse. A direcção d'esta corda e seus encontros com os eixos poderia suggerir diversas proposições secundarias, analogas ás que ja foram assignaladas a proposito da parabola e que o leitor com facilidade desenvolverá.

108.— Entre os numerosos problemas relativos ás tangentes da ellipse, convem em especial considerar o que diz respeito ao

logar do vertice do um angulo invariavel cujos lados tocam constantemente a curva, sobretudo quando é recto este angulo. A equação $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ é muito propria para esta pesquiza, considerando-se n'ella os dous valores de m, que corresponderiam a valores dados de x e de y, o que lhe faz tomar a forma

$$m^2-2\frac{xy}{x^2-a^2}m+\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=0.$$

Si, por meio das raizes, formular-se a inclinação das duas tangentes, segundo a lei $\frac{m'-m''}{1+m'm''}=$ tang V, deduzir-se-ha facilmente a equação do quarto grau que convem ao logar pedido. No caso em que as tangentes são rectangulares, unico que é util especificar, o ultimo termo da equação precedente conduz logo a $y^2+x^2=a^2+b^2$, que indica um circulo cujo raio é aliás superfluo conservar-se de memoria, pois que as tangentes aos vertices o annunciam espontaneamente.

A consideração deste logar circular tornaria muito facil a determinacão sepecial dos rectangulos *maximum* e *minimum* circumscriptos a ellipse e, desde então, inscriptiveis a um tal circulo. Na verdade, sob este ultimo aspecto, o *maximum* corresponderia evidentemente ao quadrado, si todavia pode elle ser circumscripto á ellipse. Para o leitor assegurar-se disto, basta notar que, em vista de uma symetria necessaria, os seus dous lados devem ser inclinados de 45.º sobre os eixos. Ora, fazendo-se $m=\pm 1$ na equação da tangente, o coefficiente linear coincide de facto com o raio do circulo precedente, o que decide da conveniencia desta solução. Quanto ao *minimum*. é preciso discernir entre todos os retangulos circumscriptos á ellipse e inscriptos ao circulo, aquelle cujos lados mais differem entre si, o que reduz-se a combinar as tangentes mais afastadas do centro com as mais proximas, d'onde resulta o rectangulo construido sobre os dous eixos.

Para resolver este duplo problema de um modo verdadeiramente analytico. susceptivel de imitação em relação a outra qualquer curva, seria necessario á equação $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ de qualquer tangente juntar as tres outras

$$y=nx-\sqrt{a^2n^2+b^2},\quad y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}$$

$$y=-\frac{1}{m}x=\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}$$

que representam a que lhe é parallela e as duas que lhe são perpendiculares. Desde então, por um calculo facil bem que um pouco longo, formular-se-hiam a principio as intersecções mutuas dos quatro lados do rectangulo correspondente, em seguida os comprimentos delles, e em fim a area d'esta figura, relativamente á unica constante indeterminada m. Uma vez obtida esta formula a applicação da theoria dos *maxima* e *minima*, sob a forma que se julgar conveniente, conduzirá facilmente á solução pedida. Acbando-se ser aqui a função do quarto grau mas biquadrada, poder-se-ha mesmo applicar-lhe o methodo algebrico primordial, resolvendo-se primeiro a questão mais extensa, que consiste em circumscrever a uma ellipse dada um rectangulo equivalente a um quadrado dado.

Alguns outros logares interessantes podem ser deduzidos da consideração das tangentes á ellipse, projectando-se, quer sobre as tangentes, quer tambem sobre as normaes, os diversos pontos singulares, taes como o centro, os focos, os vertices, etc. Apenas me demorarei no caso da projecção do centro sobre as normaes. Commodamente se formaria a equação do logar, por meio da equação ordinaria da normal, $y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$, combinada com a do raio perpendicular, $y=-\frac{b^2x'}{a^2y'}x$, eliminando-se as variaveis auxiliares, x' e y', pela relação $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$. Porem convem mais empregar uma forma geral da equação da normal, analoga á que acaba de servir-nos para a tangente, isto é, relativa só ao coefficiente angular. Procedendo-se por assemelhação, como ja indiquei tratando da parabola, achar-se-ha com facilidade que a equação

$$y=mx+\frac{c^2m^2}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}.$$

representa assim uma normal qualquer a ellipse. Eliminando-se m com auxilio da equação do raio perpendicular, $y=-\frac{1}{m}x$, obtem-se logo para o logar procurado a equação do sexto grau, $(a^2y^2+b^2x^2)(y^2+x^2)^2=c^4x^2y^2$, cuja discussão directa seria difficultosa, mas que torna-se facilmente apreciavel pela introducção das coordenadas polares. Afinal, acha-se assím a equação polar

$$u^2=\frac{c^4\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},$$

muito propria para caracterisar claramente a forma geral de cada uma das quatro partes symetricas que compõem este notavel logar. O raio vector, nullo para $\varphi=0$ e $\varphi=90^\circ$, o que indica duas tangentes no centro confundidas com os eixos da ellipse, attinge o seu *maximum*, $a—b$, quando tang $\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}$, como indica a resolução desta equação em sentido inverso.

109.— Devemos agora considerar as propriedades da ellipse relativamente aos diametros. Applicando-se um ou outro dos nossos dous methodos geraes sobre este assumpto, acha-se facilmente a equação $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$, em relação a um diametro qualquer correspondente a cordas cujo coefficiente angular seja m. Esta equação mostra logo, conforme as nossas indicações anteriores, que todos os diametros de uma ellipse são linhas rectas que convergem ao centro. Mas a sua especial apreciação geometrica faz alem disso descobrir uma notavel propriedade, resultante da ligação $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ assim estabelecida entre os coefficiente angulares simultaneos de qualquer diametro e de suas cordas. A symetria analytica de tal relação indica geometricamente que os diametros da ellipse são reciprocos uns dos outros, ou *conjugados*, segundo a expressão usada, alias um pouco vaga; por isso pue, si fôrem tiradas do centro duas rectas cujos coefficientes angulares estejam assim ligados, cada uma d'ellas passará pelos meios das cordas pararelllas a outra. Esta constantes reciprocidade constitue, quanto aos diametros, a principal differença entre a

ellipse ou a hyperbole e a parabola : evidentemente ella está em harmonia necessaria com a existencia ou ausencia de um centro.

Encarada mais especialmente, esta ligação fundamental dos diametros conjugados da ellipse reproduz de novo a relação observada a principio quanto ás cordas supplementares, e em seguida estendida á subordinação de cada tangente ao seu raio. De sorte que, em virtude desta aproximação, os tres pares de rectas podem sempre tornar-se parallelos e comportam as mesmas diversidades de inclinação ja apreciadas em relação ao primeiro. D'ahi resulta sobretudo uma construcção mui simples para determinar, com auxilio da ellipse dous diametros conjugados formando um angulo dado, procurando-se cordas supplementares que lhes sejam parallelas. por meio de um circulo capaz deste angulo, descripto sobre um diametro qualquer. A intersecção d'este com a ellipse dada fóra das extremidades desta base, marcará o ponto de partida das cordas buscadas, de maneira a indicar commodamente os diametros pedidos. Só será possivel tal encontro em quanto a inclinação proposta cahir entre os limites convenientes, que, segundo a lei precedente, correspondem aos diametros parallelos às cordas dos quatro vertices, e, desde então, dirigidos segundo as diagonaes do rectangulo dos eixos. Portanto o angulo dado não poderá afastar-se de 90°, sinão até o agudo ou obtuso cuja metade seja $\frac{b}{a}$ para tangente ou cotangente. Neste intervallo, a construcção indicará sempre dous systemas symetricamente dispostos, os quaes não coincidirão a não ser por occasião dos dous casos extremos, um dos quaes refere-se aos eixos da ellipse e o outro a esse ultimo par de diametros, offerecendo o *maximum* de obliquidade.

A correspondencia geral dos diametros conjugados com as cordas supplementares, bem que de ommum seja encarada só como o simples resultado de uma aproximação algebrica, comtudo nada offerece de accidental, e comporta directamenta uma explicação geometrica que importa apreciar, porisso que pode-se vêr n'ella a verdadeira origem especial do conjunto das noções relativas aos diametros da ellipse independentemente de toda theoria geral. Basta observar, que, segundo a definição das cordas supplementares, a parallela tirada do centro a uma corda qualquer

passa necessariamente no meio da sua conjugada. Ora, o theorema primitivo das cordas supplementares nos ensina que as supplementares de cordas parallelas tambem o são entre si. Portanto a recta tirada do centro parallelamente a uma corda arbitraria passa sempre nos meios de todas as que são parallelas á sua supplementar, d'onde resulta logo a demonstração simultanea da natureza rectilinea dos diametros da ellipse, da convergencia d'elles ao centro, e da sua reciprocidade necessaria. Assim, o theorema das cordas supplementares, que, sob um aspecto, já nos tinha fornecido a base essencial das tangentes á ellipse, é igua mente proprio, sob outro ponto de vista, a fundar inteiramente a theoria dos diametros. Esta dupla aproximação, até hoje despercebida, tende a representar uma tal noção como sendo talvez a mais fundamental de todas as que são particularmente concernentes á ellipse: o seu officio real, no conjuncto do estudo desta curva, é ao menos tão importante como o da propriedade foca .

Referindo-se a equação da ellipse a um par qualquer de diametros conjugados, é facil prever que ella conservará necessariamente a mesma forma que em relação aos eixos primitivos, que, a este respeito só se distinguem pela rectangularidade caracteristica. Na verdade a equação não poderá, desde então, conter a primeira potencia de nenhuma das duas coordenadas, afim de que cada uma d'ellas possa admittir dous valores iguaes e contrarios para um mesmo valor da outra, conforme o attributo goometrico commum a ambas. Verifica-se effectivamente esta previsão pela substituição das formulas ordinarias de transposição,

$$x = x' \cos X' + y' \cos Y', \qquad y = x' \operatorname{sen} X' + y' \operatorname{sen} Y',$$

com a condição de ter-se em vista a relação necessaria

$$\operatorname{tang} X' \operatorname{tang} Y' = -\frac{b^2}{a^2},$$

sem a qual os dous diametros não seriam conjugados. e que annullará espontaneamente o coefficiente total do unico termo que ao mesmo tempo contem a primeira potencia de ambas as variaveis. Quanto aos coefficientes dos termos restantes, podem sempre tornar-se analogos aos da equação primitiva

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 ,$$

introduzindo-se tambem as distancias do centro ás intersecções da curva com os novos eixos, sob as designações semelhantes a' e b', de maneira a formar, em relação a um systema qualquer de diametros conjugados, a equação final $a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2$. A execução do calculo de transposição determinaria espontaneamente as expressões d'essas constantes lineares a' e b' em funcção das constantes angulares correspondentes

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 X' + b^2 \cos^2 X'}, \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 Y' + b^2 \cos^2 Y'} .$$

Mas estas formulas, necessariamente similares, podem ser, alem disso, directamente obtidas, como devendo coincidir, por sua natureza, com a equação polar da ellipse relativa ao centro.

Segundo a relação fundamental $\operatorname{tang} X' \operatorname{tang} Y' = -\frac{b^2}{a^2}$, emquanto um dos diametros conjugados se encurta afastando-se do grande eixo, o outro alonga-se afastando do pequeno eixo; de sorte que existe uma situação intermediaria em que seus comprimentos são iguaes. Esta situação corresponde evidentemente ao caso em que os dous angulos X' e Y' são supplementares; os dous diametros se acharão n'elle symetricamente dispostos e, desde então, dirigidos segundo as diagonaes do rectangulo dos eixos, isto é, coincidem com aquelles em que já reconhecemos o *maximum* de obliquidade. Este notavel systema, o mais importante de todos depois do dos eixos propriamente ditos; apresenta, pois, em relação a este, um perfeito contraste, quer quanto á inclinação, quer quanto á relação dos comprimentos. A sua posição na ellipse representa exactamente a das asymptotas na hyperbole, como em especial se confirmará no capitulo seguinte, com quanto não exista aliás nenhuma analogia geometrica entre os dous pares de re tas. A unica aproximação analytica a que podem dar logar, consiste em que a equação da curva pode, em vista d'elles, ser reduzida, de uma e outra parte, a conter só uma constante arbitraria. Mas a diversidade necessaria das duas equações respectivas, das quaes uma tem a forma $x^2 + y^2 = r^2$ e a ontra

$xy=m^2$,impede que tal conformidade tenha effeito geometrico de alguma importancia. Não obstante, convem notar aqui que a ellipse é susceptivel de uma equação analoga á do circulo, mas em relação a um unico systema de eixos que nunca podem tornar-se rectangulares, e cujo grau de obliquidade caracterisa naturalmente a especie de ellipse de que se trata. Esta tanto mais differirá do circulo quanto mais tal inclinação se afastar do angulo recto, em exacta conformidade com as noções anteriores sobre a condição de semelhança, pois que a tangente da metade de um angulo tal representa a relação dos dous eixos da ellipse. Pode-se, alem disso, calcular facilmente pelas formulas precedentes, fazendo tang $X'=\frac{b}{a}$, o valor da unica constante r contida então pela equação da ellipse, a qual a analogia levaria a chamar-se especialmente o *raio* desta curva. Acha-se assim $r^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, o que liga directamente este raio á corda do quarto de ellipse, segundo a mesma lei que no circulo.

Os comprimentos variaveis dos diametros conjugados da ellipse, comparados,quer entre si. quer á obliquidade correspondente, dão logar a dous importantes theoremas especiaes que merecem conservar o nome do seu immortal autor, Apollonio, o maior geometra da anguidade depois de Archimedes. Quanto ao primeiro, o ponto de vista moderno naturalmente haveria de conduzir-nos a elle, si ainda fosse ignorado. De facto, os comprimentos a' e b', subordinados, segundo as formulas precedentes, aos angulos X' e Y', não poderiam ser independentes um do outro sinão quando os dous angulos tambem o fossem. Mas a ligação necessaria d'estes indica evidentemente entre a' e b' uma relação constante que facilmente se descobrirá substituindo na condição angular , tang X' tang Y'$=-\frac{b^2}{a^2}$, as expressões de tang X', e tang Y' em a' e b'. A execução normal deste calculo conduz afinal sem nenhum vão artificio a

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2.$$

Assim, o primeiro theorema de Apollonio consiste em que, na ellipse, é constante somma dos quadrados de dous diametros

conjugados quaesquer. Sob forma graphica, reduz-se este enunciado a dizer-se que, si ao extremo de cada semi-diametro se eleva uma perpendicular igual ao seu conjugado, o ponto correspondente pertencerá sempre ao circulo ja reconhecido como sendo o logar das intersecções das tangentes retangulares.

Quanto ao segundo theorema de Apollonio, é mister, ao que me parece, confessar com franqueza que a marcha moderna não levaria a elle espontaneamente, si não estivesse previamente descoberto; de sorte que a demonstração analytica deve consistir em uma pura retificação que então convem simplificar o mais possivel, em vista da relação a provar, que é $a'\ b'$ sen $Y'X' = a\ b$. Para isso, basta multiplicar entre si as expressões precedentes de a'^2 e b'^2, afim de ahi transformar em seguida o denominador por meio da condição fundamental tang X' tang Y' $= -\frac{b^2}{a^2}$ posta a principio debaixo da forma

$$a^2 \text{ sen } X' \text{ sen } Y' + b^2 \cos X' \cos Y' = 0,$$

e depois elevada ao quadrado. O theorema assim verificado consiste, pois, geometricamente na constancia notavel da area do parallelogrammo construido sobre dous diametros conjugados quaesquer, bem que os seus angulos e lados variem incessantemente.

Estas duas relações especiaes, $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ e $a'b'\text{senV} = ab$, podem ser utilisadas para, em sentido inverso, determinar commodamente o comprimento dos eixos da ellipse, com auxilio de um systema arbitrario de diametros conjugados, dados ao mesmo tempo de grandeza e inclinação. A principio seria facil deduzir directamente a e b, resolvendo-se uma equação biquadrada. Porém convem mais, por um artificio facilmente inspirado, tomar especialmente para incognitas $a-b$ e $a+b$, cujos valores resultarão de muito simples combinações, segundo as formulas $(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b'\text{senV}$, $(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\text{senV}$, cuja construcção é sobretudo commoda, si forem comparadas com a relação conhecida que determina um lado de triangulo por meio dos outros dous e do angulo comprehendido. Acha-se assim que $a-b$ constitue o terceiro lado de um triangulo que é facil traçar, e em que os dous lados a' e b' comprehendem um angulo complementar

da inclinação dada, V. Em seguida obtem-se $a+b$ substituindo este angulo por seu supplemento, afim de mudar o signal do coseno correspondente.

Tal construcção dissipa d'ante-mão a unica seria difficuldade graphica que possa offerecer o problema essencial pelo qual terminaremos o estudo da ellipse, bem como o da parabola, por ser muito proprio para trazer á lembrança as principaes propriedades de que apenas exige judiciosa applicação collectiva. Trata-se, pois, como na parabola, de reconstruir todos os elementos geometricos de uma ellipse por meio de um arco qualquer. Dous pares distinctos de cordas parallelas determinarão a principio o centro, pela intersecção dos diametros correspondentes, quasi tão commodamente como no circulo. Poderemos ter assim dous diametros conjugados, dos quaes um será naturalmente conhecido de comprimento como de posição, pelo seu encontro espontaneo com o arco dado; quanto ao outro, b', um só ponto deste arco o determinará facilmente, segundo a equação correspondente da curva, $a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$, donde resulta a formula de facil construcção $b'=\frac{a'y'}{\sqrt{a'^2-x'^2}}$. Isto posto, a construcção de Apollonio conduzirá, como acima, a achar os comprimentos dos eixos a e b. Desde então, a consideração do logar das projecções dos focos sobre as tangentes permittirá acabar commodamente a solução por meio da determinação dos focos; pois que o circulo circumscripto que contem todas as projecções, pode ser agora descripto, e demais é facil traçar as duas tangentes indispensaveis, tirando da extremidade de cada diametro uma parallela ao seu conjugado.

110.—Nada mais resta-nos a considerar na ellipse sinão as propriedades relativas á theoria das quadraturas. A applicação directa dos nossos methodos elementares á equação $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$

ou $y=\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}$, so em serie poderia fornecer-nos a expressão geral da a ea do segmento elliptico. Mas, suppondo-se conhecid[a] a medida do circulo, ao menos em totalidade, esta equação reduz para logo, segundo o principio de Wallis, a quadratura da ellipse á do circulo circumscripto; pois que os segmentos respectivamente comprehendidos entre os mesmos limites terão então, bem como

as ordenadas correspondentes, uma relação constante igual á dos eixos da ellipse. Demais, esta relação está aqui especialmente conforme com a consideração da ellipse como projecção do circulo, respeitada a regra ordinaria para projectar uma area plana. Quanto ao mais, estas duas maneiras de estabelecer tal comparação são em essencia equivalentes. Assim, sendo a area do circulo circumscripto expressa por πa^2, a da ellipse inteira se medirá por πab; de sorte que a ellipse é media proporcional entre os dous circulos —inscripto e circumscripto, ou equivale a um circulo cujo diametro seja media proporcional entre os dois eixos d'ella. Facil é concluir d'aqui a determinação de uma ellypse semelhante a uma dada e equivalente a um circulo dado.

A nossa theoria das quadraturas fornece facilmente a medida dos dous ellipsoides, um alongado, o outro achatado, produzidos pela revolução de uma ellipse ao redor dos seus eixos. Em torno do grande eixo, segundo a lei $z=y^2$, a curva auxiliar será a parabola $z=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, cuja area, $S=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)$, dá logo a formula $y=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)$ para o volume do segmento do ellipsoide, comprehendido entre dois planos perpendiculares ao eixo, tirados, um do centro e o outro á distancia x. Fazendo-se ahi $x=a$, acha-se finalmente que o ellipsoide inteiro é medido por $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

Um calculo semelhante conduziria a um resultado analogo, $\frac{4}{3}\pi a^2b$, para o outro ellipsoide. Vê-se que o alongado é menor do que o achatado, segundo a relação do pequeno eixo para o grande. Estes dous volumes só coincidiriam para uma ellipse equilatera, reproduzindo-se espontaneamente a conhecida cubatura da esphera.

CAPITULO IV

THEORIA DA HYPERBOLE

111.—A equação simplificada da hyperbole, $px^2+qy^2=1$, não differe da da ellipse sinão em serem os dous coefficientes p e q necessariamente de signaes contrarios, o que corresponde geometricamente a que uma das duas rectas, em torno das quaes a curva é symetrica, continúa a encontral-a, ao passo que a outra não a corta mais; de sorte que então só existe um par de vertices em vez de dous. Supporemos habitualmente que as abscissas x se referem ao eixo *transverso* e as ordenadas y ao *não transverso*. Poder-se-ha introduzir algebricamente, como na ellipse, o comprimento $2a$ do primeiro, que semelhantemente designará a distancia dos dous vertices, pondo-se $p=\frac{1}{a^2}$. Mas é só por mera analogia algebrica, que a principio parece destituida de interpretação geometrica, que se fará tambem $q=-\frac{1}{b^2}$, de maneira a dar á equação da hyperbole a forma habitual

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1, \text{ ou } a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

que só differe da da ellipse pela simples mudança pe b^2 em $-b^2$. Todavia, vai-se reconhecer que, apezar de menos directa do que a de a, a significação graphica de b é contudo igualmente clara e precisa.

Discutindo-se esta equação, commodamente reproduz-se o contraste que tal opposição de signal tantas vezes ja nos tem apresentado, substituindo-se um logar illimitado e interrompido a uma curva fechada e continua. O sentido da curvatura é n'ella indicado, alem do grau, pela marcha geral do coefficiente angular da tangente, $\text{tang}\,\alpha=\frac{b^2x}{a^2y}$, que, a principio infinito no vertice, diminúe em seguida constantemente, como o mostra a substituição de y em x, seguida da divisão commum por x. O seu limite de diminuição, $\pm\frac{b}{a}$, annuncia a direcção das duas asymp-

totas que, sabe-se d'ante-mão são sujeitas a passar no centro; alem disso, o methodo subsidiario o confirma claramente, com auxilio da equação $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Tal determinação representa estas duas rectas como coincidindo espontaneamente com as diagonaes do rectangulo construido sobre os dous eixos da hyperbole, de maneira a occupar aqui o logar que na ellipse é destinado aos diametros conjugados iguaes Reciprocamente encarada, tal construcção fornece espontaneamente a melhor interpretação geometrica do eixo não-transverso $2b$, desde então igual á parte da tangente ao vertice, comprehendida entre as duas asymptotas. Quanto ao mais, pondo-se a equação da hyperbole sob a forma $\frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2$, poder-se-hia generalisar esta apreciação, encarando b como uma media proporcionai entre as duas distancias, $\frac{b}{a}x + y$ e $\frac{b}{a}x - y$, de um ponto qualquer da curva ás duas asymptotas, estimadas parallelamente a este eixo não-transverso; converia tambem uma semelhante determinação em relação ao eixo transverso, mas sem commumente offerecer tamanha utilidade.

O angulo variavel das asymptotas, assim independente da relação dos eixos, especifica a forma de cada hyperbole. Quando é recto, a hyperbole chama-se *equilatera*, pois que a e b são então iguaes. Esta especie notavel desempenharia, em relação ás outras hyperboles, o mesmo papel que o circulo relativamente a quaesquer ellipses, si podesse ser tão bem conhecida. Mas a sua forma, de pouco mais facil concepção do que a de uma hyperbole não equilatera, deve hoje fazer ligar-se pouco interesse ao seu estudo especial; de sorte que seria superfluo insistir aqui sobre o equivalente da comparação que nos permittiu deduzir graphicamente a ellipse do circulo. Conforme fôr o eixo transverso maior ou menor que o não transverso, a hyperbole estará comprehendida no angulo agudo ou no abtuso das asymptotas, e, desde então, menos ou mais aberta do que a hyperbole equilatera.

Como importa familiarisarmo-nos muito com a noção das asymptotas, cuja imagem deve tornar-se inseparavel da da hyperbole, convem concebel-as tambem sob um outro aspecto geome-

trico, como linhas naturaes de demarcação entre as rectas que, tiradas do centro, encontram a curva e as que não a cortam. Si procura-se a intersecção de um raio qualquer, $y = mx$, com a hyperbole, as coordenadas communs, $x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$ e $y = \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$, indicarão que o encontro terá logar quando este raio estiver abaixo da asymptota, e cessará quando passar acima, depois de ter-se afastado ao infinito a intersecção d'elle com a propria asymptota.

Tendo sido, no capitulo precedente, as outras duas curvas do segundo grau especialmente ligadas ao circulo, não é inutil observar tambem que a hyperbole deriva delle indirectamente, por intermedio da parabola. A principio pode estabelecer-se esta derivação do mesmo modo segundo o qual já foi a parabola tirada do circulo. E' facil provar, com effeito, que uma parabola se transformará em hyperbole, si se prolongam as ordenadas de maneira a tornal-as iguaes ás cordas correspondentes tiradas do vertice. Mas, assim, apenas se pode produzir uma hyperbole equilatera, cujo eixo seria igual ao parametro da parabola. Seria necessario repetir de mais em mais a mesma construcção para deduzir hyperboles cada vez menos equilateras, á medida que estas modificações graphicas mais se multiplicassem. A este modo geometrico muito restricto e indirecto convem juntar outra geração que, da mesma parabola, faz decorrer todas as especies de hyperbole. Consiste ella em considerar a hyperbole como o logar do vertice de um angulo invariavel, cujos lados tocam continuamente uma parabola fixa. Obtem-se assim, em relação aos eixos ordinarios da parabola $y^2 = mx$, a hyperbole

$$y^2 - x^2 \operatorname{tang}^2 V - \frac{1}{2} m (2 + \operatorname{tang}^2 V) x = \frac{m^2}{16} \operatorname{tang}^2 V,$$

que convem igualmente ao angulo V o ao seu supplemento, de sorte que esta geração permitte obter-se a totalidade da curva. E' aliás facil construir os vertices, quer por meio da equação d'ella, quer procurando os pontos do eixo, em que a tangente á parabola forma com elle um angulo igual á metade de V ou de seu supple-

mento. A inclinação de suas asymptotas sobre esse eixo commum ás duas curvas é evidentemente igual ao angulo dado. Vê-se por ahi que, de accordo com a theoria geral de semelhança, as hyperboles da mesma especie corresponderão ao movimento do mesmo angulo em torno de diversas parabolas. Ao contrario, cada parabola dará origem a todas as figuras hyperbolicas, fazendo-se sobre ella moverem-se differentes angulos, bem que aliás devam os eixos d'estas hyperboles, em virtude de tal identidade de origem, conservar entre si alguma relação constante, que é inutil determinar aqui.

A final de contas, não é muito para admirar que as tres curvas do segundo grau possam assim, directa ou indirectamente, derivar do circulo, por isso que, historicamente, é d'elle que partiram, por uma construcção em relevo, é verdade, porem mui símples, como havemos de reconhecel-o no capitulo seguinte: era necessario, pois, que esta fonte primitiva encontrasse algum equivalente plano.

112.—Com quanto o estudo da hyperbole, si fosse immediato, devesse naturalmente offerecer um pouco mais de difficuldade que o da ellipse, simplifica-se muito quando só é abordado depois deste, pois que a analogia das equações dispensa-nos então de reproduzirmos os diversos calculos relativos ás investigações verdadeiramente communs, limitando-nos a modificar-lhes os resultados pela simples mudança de b em $-b^2$, para não insistirmos especialmente sinão sobre as modificações geometricas correspondentes. Appliquemos desde logo esta marcha didactica ao theorema das cordas supplementares, cuja alta importancia já reconhecemos em relação a ellipse, e que deve aqui persistir essencialmente a titulo de consequencia directa da equação commum.

A modificação que elle soffre aqui consiste em tornar-se então positivo o producto constante dos dous coefficientes angulares. Como desapparece o losango dos vertices, deve-se agora mencionar expressamente o valor, $\frac{b^2}{a^2}$, proprio a este producto, que nenhum par particular poderia mais indicar assás facilmente, sinão no limite Esta mudança de signal annuncia que os dous angulos

correspondentes são aqui simultaneamente agudos ou obtusos, ao passo que na e lipse eram sempre de especie differente: vê-se sem difficuldade que uma tal distincção está em harmonia espontanea com a diversidade fundamental das duas figuras. Disto resulta que um dos dous factores é agora superior e o outro inferior a $\frac{b}{a}$, d'onde segue-se, geometricamente, que, de duas cordas supplementares quaesquer, uma é mais obliqua ao eixo transverso e a outra menos do que as asymptotas. Esta differença é a consequencia necessaria da distincção espontaneamente estabelecida entre as cordas interiores, que unem dous pontos do mesmo ramo da hyperbole ou estão comprehendidas na concavidade, e as cordas exteriores, que vão de um ramo ao outro ou são traçadas na convexidade. Desde então, vê-se que a inclinação mutua das cordas supplementares não está, em relação á hyperbole, sujeita a limite algum: partindo de duas cordas rectangulares, que são parallelas aos eixos, poder-se-ha sobre a mesma base collocar pares que offereçam todos os graus de obliquidades, até o parallelismo rigoroso relativo ás cordas parallelas ás asymptotas. Com effeito, facil é verificar que o circulo, por meio do qual se obteria aqui, como na ellypse, duas cordas supplementares que formem um angulo dado, jamais poderia deixar de encontrar a curva.

Si a hyperbole torna-se equilatera, este theorema experimenta uma modificação muito menos notavel do que para a ellipse, mas, ainda assim, digna de menção: consiste ella em sempre serem então complementares as inclinações de duas cordas supplementares quaesquer sobre o eixo da curva.

Para melhor caracterisar, em relação á hyperbole e á ellipse, a verdadeira natureza de um tal throrema, hoje muito pou o sentida, é preciso agora convertel-o em definição directa destas curvas, assim descriptas por um ponto, de que as linhas de juncção a dous pontos fixos formem com uma recta fixa dous angulos cujas tangentes sejam sempre inversamente proporcionaes. Chamando-se φ e ψ estes dous angulos variaveis, a equação natural do logar seria, pois, $\text{tang}\varphi\text{tang}\psi = k$. Qualquer que seja o signal d'este producto constante, a discussão prévia indica a principio uma curva que tem sempre para centro o meio entre os dois pontos fixos, e que é mesmo necessariamente symetrica em torno da parallela e

da perpendicular que ahi são tiradas á recta fixa. Conforme seja k negativo ou positivo, a distincção dos dous casos se apresenta em seguida espontaneamente. De facto, na primeira hypothese, a curva, que sempre cortará um dos eixos, poderá igualmente cortar o outro; sendo de especie differente os dous angulos φ e ψ as duas rectas moveis nunca poderão tornar-se parallelas, e o logar será fechado e bem assim continuo. Si, ao contrario, k é positivo, estes angulos serão sempre da mesma especie e susceptiveis de igualdade, de sorte que o logar, necessariamente illimitado, será alem disso descontinuo, como não podendo mais encontrar ao mesmo tempo os dois eixos. Quanto á passagem para a equação rectilinea, nenhuma difficuldade pode offerecer, sobretudo em relação a taes eixos. Chamando-se p e q as coordenadas correspondentes de um dos pontos fixos, ter-se-ha $\text{tang}\varphi=\frac{y-q}{x-p}$, $\text{tang}\psi=\frac{y+q}{x+p}$, o que conduz á equação $y^2-kx^2=q^2-kp^2$, em que logo se reconhece a ellipse ou a hyperbole, e que, demais, indica a passagem do logar nos dous pontos dados, ja explicada geometricamente a proposito da ellipse.

113.— A applicação da theoria dos focos á equação simplificada da ellipse forneceu-nos os dous systemas $\beta=0, \alpha=\sqrt{a^2-b^2}$ e $\alpha=0$, $\beta=\sqrt{a^2-b^2}$, dos quaes cada um por sua vez é aceitavel só, segundo a grandeza relativa das duas dimensões a e b. Para a hyperbole, a mudança de b^2 em $-b^2$ indica ao contrario que o segundo nunca pode convir e que o primeiro subsiste sempre, qualquer que seja a ordem de grandeza dos eixos. Os dous focos estão, pois, neste caso, constantemente collocados sobre o eixo transverso e não sobre o grande eixo. Em geral, tudo o que para a ellipse se applicava ao grande eixo, convem na hyperbole ao eixo transverso, e da mesma sorte para com o segundo eixo respectivo. Quando se tem necessidade de uma denominação commum para designar a recta que na hyperbole une os dous vertices, e na ellipse constitue o diametro mais longo, o nome do *eixo focal* se apresenta, pois, naturalmente como o unico igualmente proprio aos dous casos.

Segundo a modificação precedente, a excentricidade c vale aqui $\sqrt{a^2+b^2}$, e representa a distancia do centro da hyperbole ao

ponto em que a asymptota corta a tangente ao vertice: os focos se acham, pois, situados além dos vertices, ao passo que os da ellipse os precediam. Esta diversidade, porem, não faz mais que manter uma conformidade mais essencial que consiste em que, n'um e n'outro caso, os focos cahem sempre na concavidade da curva, segundo as condições necessarias da noção primitiva. Tal differença não constitúe, pois, sinão uma nova consequencia de facil previsão, do contraste fundamental das duas figuras.

Formulando-se as distancias racionaes,

$$d' = \frac{cx}{a} - a, \quad d'' = \frac{cx}{a} + a,$$

do foco a um ponto qualquer da curva, é mister, em relação á primeira, inverter a ordem da subtracção conveniente á ellipse, pois que c e x são aqui superiores a a. D'ahi resulta que, em vez da somma, é a differença d'estas distancias variaveis que torna-se agora constante, de conformidade com a nossa distincção primordial das duas curvas. A posição das directrizes é igualmente deslocada, pois que o seu afastamento commum do centro, $\frac{a^2}{c}$, é agora menor que a, de sorte que ellas cahem entre os vertices e não além d'elles. Mas, como em relação aos focos, esta modificação mantem uma conformidade necessaria, afim de que em ambos os casos as directrizes residam na convexidade da curva que não devem cortar. Emfim, a relação especifica, $\frac{c}{a}$, excede actualmente a unidade, de acordo com o contraste ja apreciado (23).

Si retomarmos, em relação á hyperbole, o problema ja tratado na ellipse, que consiste em determinar a curva com o auxilio de um foco e tres pontos, poderemos agora completar a solução d'elle, quer graphica, quer analyti a, sempre sujeita á mesma marcha. Quanto á primeira, a construcção ja explicada suppunha tacitamente que a directriz procurada deveria constantemente deixar do mesmo lado os tres pontos dados, como o exige necessariamente a ellipse e tambem a parabola. Mas, para a hyperbole, pode não ser assim, e, desde então, este traçado não dá todas as soluções admisssiveis: é necessario aqui, em relação a

cada um dos pontos da directriz assim determinados, aceitar alem disso a posição comprehendida entre os dous pontos dados correspondentes, e marcada, sobre a recta de juncção, pela bissectriz do angulo de que apenas haviamos considerado o supplemento. Dahi resultam afinal quatro soluções: as tres novas nunca podem convir sinão a hyperboles; só a primeira será hyperboli a, ellipt ca ou mesmo parabolica, segundo a diretriz obtida se acha mais proxima, mais distante, ou tão afastada dos pontos dados quanto o foco.

A apreciação analytica não parece a principio susceptivel de reproduzir esta inevitavel pluralidade, sobretudo quando se reduz ao primeiro grau as tres equações de condição, como ja tivemos de fazer (106). Porem, com mais attenção, reconhece-se facilmente a exacta correspondencia necessaria dos dous modos de solução, considerando que n'esta util reducção cada um dos membros conhecidos, $u,'\ u,''\ u,'''$ podia igualmente ser tomado com o signal —, e que a escolha espontanea do signal + não estava de modo algum motivada. Si, pois, sem alterar as formulas obtidas, tem-se convenientemente em vista uma tal ambiguidade, será facil procurar-lhes toda a extensão conveniente á plena apreciação do problema proposto. Poder-se-h a mesmo receiar obter assim oito soluções em vez de quatro, si não fosse evidente que, devendo esta ambiguidade ser essencialmente relativa, se achará sufficientemente representada pelo signal alternat vo de duas das tres distancias dadas $u,'\ u,''\ u'''$, attribuindo-se arbitrariamente á outra um signal fixo.

Esta consideração é a unica que importava indicar expressamente a proposito dos diversos problemas relativos aos focos, que aliás se resolverão para a hyperbole do mesmo modo que em relação a ellipse, sem agora exigir nenhuma explicação nova, analytica ou geometrica.

114.— Relativamente ás tangentes, as propriedades da hyperbole são em essencia as mesmas que as da ellipse, não podendo a mudança de b^2 em $-b^2$ exercer a este respeito sinão uma influencia muito secundaria. A equação ordinaria da tangente é agora $y-y'=\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x')$. D'ella resulta, como na ellipse, $x=\frac{a^2}{x'}$, para a sua intersecção com o eixo focal; somente, sendo agora x' su-

perior a a e podendo crescer indefinitivamente, esse ponto cahe sempre entre o vertice adjacente e o centro, aproximando-se continuamente d'este, com o qual confunde-se quando o contacto se dá no infinito, conforme as indicações fornecidas pela asymptota.

Entre a direcção de cada tangente e a do raio correspondente existe uma relação analoga a da ellipse, $\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$; mas os factores deste producto constante têm então o mesmo signal e tornam-se susceptiveis de exacta coincidencia, quando as duas rectas confundem-se com a asymptota. Em outro qualquer caso, o coefficiente angular da tangente é superior e o do raio inferior ao da asymptota. A comparação com as cordas supplementares subsiste essencialmente, e comporta a mesma previsão directa, assim como consequencias equivalentes, sob semelhantes modificações respectivas. A distincção d'estas cordas em interiores e exteriores corresponde á existencia actual de limites, inferior e superior, para as inclinações da tangente ou do raio sobre o eixo focal: as tangentes só podem ser parallelas ás cordas interiores e o raio só ás outras. Em fim, a possibilidade de uma obliquidade qualquer, reconhecida aqui em relação ao primeiro par, pode igualmente ser verificada e explicada a respeito do segundo.

A propriedade da tangente á ellipse com relação aos focos não experimenta na hyperbole, sob a forma a mais usual, outra modificação real, alem da que resulta necessariamente da nova figura geral, que exige que a tangente caia sempre entre os dous focos, em vez de deixal-os do mesmo lado. Assim pois, torna-se então ella a bissectriz do proprio angulo dos dous raios vectores, e a normal a do supplemento d'elle, sendo assim mudadas as posições d'estas rectas, comparativamente ao caso primitivo. Seria superfluo determo-nos expressamente com as consequencias graphicas desta propriedade, para traçar a tangente quando se dá successivamente o ponto de contacto, a direcção ou um ponto exterior: estas tres construcções são espontaneamente analogas ás do capitulo precedente. A proposito do ultimo caso, apenas pode tornar-se util deduzir, quer de uma tal figura, quer da solução analytica, a distincção dos dous modos de incidencia das duas tangentes tiradas do ponto dado, as quaes cahirão sobre o mesmo ramo da hyperbole ou sobre os ramos oppostos, conforme estiver

este ponto comprehendido nos angulos das asymptotas, que contêm a curva, ou nos supplementos d'elles. Emfim, a situação actual da tangente entre os dous focos modificaria notavelmente as consequencias physicas desta propriedade, relativamente á reflexão, pela hyperbole ou pelo hyperboloide correspondente, das emanações partidas de um dos focos; então a convergencia para o outro não affectaria as rectas mesmas, porem seus simples prolongamentos. Esta diversidade, que nenhuma influencia teria quanto á luz, faria desapparecer a concentração caustica que exige um concurso real e não puramente geometrico.

Sob a segunda forma essencial, a mais espontaneamente analytica, este theorema não pode soffrer aqui modificação alguma, pois que a equação $y^2+x^2=a^2$, do logar das projecções dos focos sobre as tangentes na ellipse, não contem b^2. Este logar é, pois, sempre um circulo, tendo ainda para diametro o eixo focal, somente, em vez de ser circumscripto á curva, lhe é agora inscripto: o calculo e a figura estão de accordo a este respeito. Considerando-se as asymptotas como tangentes, pode-se facilmente verificar a confirmação especial de que ellas participam em commum d'esta lei.

A terceira forma geometrica desta propriedade na realidade nenhuma modificação experimenta na hyperbole: o valor effectivo do producto constante das distancias dos dous focos a qualquer tangente, é semelhantemente indicado pelos vertices, e além disso pela asymptota, unica tangente então equidistante dos focos.

E' chegada a occazião de mencionar um problema interessante, que omitti em relação á ellipse afim de evitar repetição superflua, mas que, por sua natureza, convem igualmente ás duas curvas e mesmo, em certos casos, á parabola. Consiste elle em determinar uma curva do segundo grau por meio do foco e de trez tangentes. A solução analytica nenhuma difficuldade apresenta nem exige explicação nova. Quanto á solução graphica, depende ella da consideração das projecções do foco dado sobre as tangentes. Quando estas tres projecções estiverem excepcionalmente em linha recta, a curva será uma parabola, cuja determinação ulterior ja foi explicada em seu logar. Em qualquer, outro caso, se traçará o circulo correspondente, e segundo o foco dado lhe fôr interior ou exterior, ter-se-ha uma ellipse ou uma hyper-

bole. Assim obtido o eixo focal em grandeza e posição, facil será acabar a construcção, conforme a natureza da curva. Si o conjuncto dos dados fosse disposto de maneira que fizesse este circulo auxiliar passar pelo foco conhecido, esta indicação se referiria evidentemente a um novo caso de impossibilidade, differente dos que são relativos ao parallelismo das tres tangentes, ou ao concurso dellas a um mesmo ponto, ou á situação do foco sobre uma dellas.

Acerca dos logares mais ou menos notaveis que resultam da consideração das tangentes á ellipse, só é preciso considerar, a respeito da hyperbole, a modificação do que se refere ás intersecções das tangentes rectangulares. A equação d'elle torna-se aqui $x^2+y^2=a^2-b^2$, de sorte que a sua natureza geometrica continúa a ser a mesma, só mudando-se o raio do circulo. Mas esta mudança é tal que, si a hyperbole deixa de ser equilatera, cessa de existir este logar, depois de ter-se reduzido ao centro para a hyperbole equilatera mesma. Pode-se facilmente explicar estes resultados, considerando que, quando a hyperbole se contem no angulo obtuso das asymptotas, nenhum ponto do plano poderia fornecer tangentes rectangulares. A razão é que as duas tangentes que delle parte formam sempre um angulo superior áquelle ou inferior ao seu supplemento, segundo a situação do dito ponto, em virtude da observação ja assignalada sobre as inclinações respectivas das duas tangentes correspondentes. A hyperbole equilatera não comporta outras tangentes rectangulares alem das tiradas do centro, isto é, ás asymptotas.

115.— A natureza dos diametros e sua reciprocidade ou conjugação não soffrem mudança alguma essencial, passando da ellipse á hyperbole, quer sejam descobertos analyticamente, quer deduzidos especialmente do theorema das cordas supplementares. Somente, a relação fundamental entre as direcções de dous diametros conjugados quaesquer soffre aqui a modificação que já apreciamos em relação ás cordas supplementares e, em seguida, a respeito de uma tangente comparada ao seu raio. Com relação aos diametros, ella indica que as duas rectas de cada par, então contidas na mesma região do plano, estão sempre situadas, uma abaixo, a outra acima das asymptotas; de sorte que uma encontra a curva e a outra não pode cortal-a, confor-

me as exigencias geometricas da figura geral. Tendendo assim para a igualdade os dous coeffientes angulares, os dous diametros comportam qualquer obliquidade e aproximam-se continuamente um do outro, afastando-se dos eixos correspondentes de maneira a admittirem a asymptota como limite commum. E' aliás evidente que a distincção dos diametros em transversos e não-transversos, corresponde espontaneamente á das suas cordas em interiores e exteriores.

Em virtude dos motivos ja explicados para a ellipse, referindo-se a hyperbole a dous diametros conjugados quaesquer, a sua equação tomará finalmente a mesma forma que em relação aos eixos, $a'^2y'^2 - b'^2x'^2 = -a'^2b'^2$, sendo as constantes a'^2 e b'^2 semelhantemente expressaas pelas formulas

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2X' - a^2\mathrm{sen}^2X'} \qquad b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\mathrm{sen}^2Y' - b^2\cos^2Y'}$$

que resultam, quer do calculo de transposição, quer da equação polar relativa ao centro. O coefficiente b', proprio ao diametro não transverso, não tem a principio, do mesmo modo que b, sinão uma definição puramente abstracta, a qual torna-se tão facilmente como então susceptivel de interpretação concreta, com auxilio das asymptotas. De facto, a equação d'estas não podendo ser affectada pela obliquidade dos eixos, será sempre, em relaçãõ a um systema qualquer de diametros reciprocos, $y' = \pm \frac{b'}{a'}x'$, e dará semelhantemente $y' = \pm b'$ para $x' = a'$, de sorte que o comprimento de um diametro não transverso equivalerá ainda á parte da tangente parallela, interceptada pelas asymptotas. Poder-se-ha, demais, continuar tambem a considerar a sua metade como uma media proporcional entre as distancias de um ponto qualquer da hyperbole ás duas asymptotas, estimadas parallellamente ao diametro procurado.

Para melhor ligar as noções geometricas relativas aos diversos comprimentos dos diametros não transversos, convem considerar a curva resultante das extremidades d'elles. A precedente formula de b'^2 fornece espontaneamente a sua equação polar que, convertida segundo o modo ordinario em equação rectilinea, conduz afinal a $a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$. Este resultado indica uma hyperbole, algumas vezes chamada *conjugada* da pri-

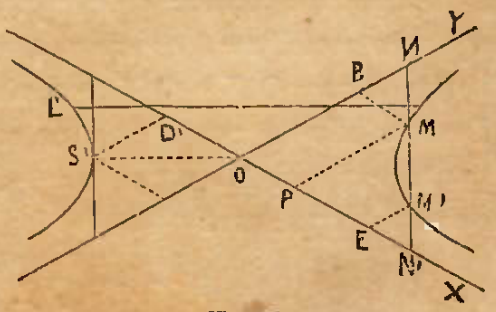
meira; seus eixos são os mesmos mas em sentido inverso, conforme a definição. Ellas têem, pois, as mesmas asymptotas, de que cada uma d'ellas occupa os angulos interdictos á outra; habitualmente as suas figuras são oppostas, e só coincidem no caso equilatero. Pode-se facilmente verificar que estas duas curvas têem necessariamente os mesmos diametros, mas sempre por contraste; de sorte que acha-se ser necessariamente mutuo o seu officio espontaneo para representar distinctamente os comprimentos dos diametros não transversos. Com o habito de não separar da imagem de uma hyperbole a da sua conjugada, a qual não é menos natural, as duas sortes de diametros tornar-se-hão igualmente intelligiveis

Sendo illimitado e, demais, crescente ao mesmo tempo cada um dos comprimentos dos dous diametros conjugados, é impossivel que o primeiro theorema de Appollonio não seja profundamente modificado em relação á hyberbole, em que, com effeito, elle torna-se $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, segundo a mudança costumada. D'ahi resulta que a' e b' nunca podem ser iguaes, a menos que a seja igual a b, no qual caso a' equivale a b'. Assim, em nenhum sentido existe na hyberbole um systema especial de diametros conjugados, caracterisado por uma igualdade de comprimento, a qual só é possivel quando a curva torna-se equilatera e então tem logar indifferentemente. De facto, sabe-se já que a posição dos diametros iguaes da ellipse corresponde a das asymptotas da hyperbole, as quaes não poderiam constituir continuamente nenhum par de diametros conjugados, pois que cada uma d'ellas representa ao mesmo tempo os dous elementos de tal par.

Quanto ao segundo theorema de Apollonio, $a'\ b'\ \mathrm{sen}V = a\ b$, nenhuma modificação pode soffrer aqui, em virtude da compensação das mudanças simultaneas que experimentam b e b'. Esta persistencia analytica explica-se geometricamente, apezar da illimitação commum dos comprimentos a' e b', pela suppressão necessaria de todo limite de obliquidade. A' medida que os dous diametros alongam-se ao mesmo tempo, aproximando-se ambos da asymptota, a diminuição não menos indefinida do angulo delles permitte conceber que a area do parallelogrammo correspondente conserva-se invariavel, com quanto a sua constancia seja, então, ainda mais notavel do que na ellipse,

A proposito destes dous theoremas, convem notar que a modificação necessaria do primeiro priva-nos agora de empregar o artificio especial que, na ellipse, tinha-nos levado a simplificar muito a determinação, quer algebrica, quer sobretudo graphica, do comprimento dos eixos por meio de dous diametros conjugados quaesquer, dados de grandeza e de posição. Mas, adiando por um pouco esta solução de maneira a poder empregar-se n'ella a nova ordem de propriedades eminentemente caracteristica, que a hyperbole apresenta em relação ás suas asymptotas, reconhecer-se-ha em breve que o conjuncto d'esta investigação comporta finalmente ainda mais simplificações na hyperbole do que na ellipse, quando se empregam judiciosamente, em ambos os casos, os meios mais convenientes.

116. —Considerando-se a equação das asymptotas da hyperbole referida a dous diametros conjugados quaesquer, $y' = \pm \frac{b'}{a'} x'$, percebe-se logo a inteira generalisação de sua construcção primitiva, reconhecendo-se, á vista da hypothese $x' = a'$, que ellas coincidem sempre com as diagonaes do parallelogrammo construido sobre esses diametros. Porém, mais completa apreciação geometrica da mesma equação conduz em seguida a um theorema notabilissimo que constitue realmente a mais importante propriedade especial da hyperbole. Vê-se, com effeito, que cada valor de uma das coordenadas, x' ou y', dá sempre á outra dous valores iguaes em relação ás duas asymptotas. Isto posto, podendo qualquer transversal, tirada ao acaso no plano da hyperbole, ser considerada como parallela a algum diametro, transverso ou não transverso, o conjugado d'este passará, pois, constantemente ao meio da parte d'esta recta, comprehendida entre as asymptotas. Ora, estando tambem necessariamente situado sobre este ultimo diametro o meio da corda, exterior ou interior, que esta mesma recta forma na hyperbole, segue-se que as duas porções da transversal, interceptadas das duas partes entre a curva e a asymptota, taes como M N e M' N' (*fig.* 75) ou L D e L' D', têem sem cessar um comprimento igual.



(Fig. 75.)

Esta bella propriedade fornece espontaneamente o mais simples meio de descrever por pontos uma hyperbole, com o auxilio das asymptotas e de um ponto dado, do qual bastará tirar uma transversal qualquer NN' entre as duas asymptotas, afim de sobre ella medir, a partir de uma d'estas, uma parte MN marcada pela outra, de modo a obter o segundo ponto M' da curva, que está nella situado. Cada ponto assim marcado poderá aliás tornar-se por seu turno o centro de uma semehante construcção, para evitar a confusão graphica inherente, á accumulação de um grande numero de linhas em redor de um mesmo ponto.

Bem que, por sua natureza, deva uma tal descripção ser julgada caracteristica, importa entretanto verifical-o expressamente, deduzindo a equação da hyperbole d'esta propriedade só. Antes, porém, convém simplificar aqui a equação natural M' N'=M N, quer para a sua discussão directa, quer para a passagem á equação rectilinea, substituindo-a pela relação evidentemente equivalente, M' E = N B, entre os dous comprimentos de direcção invariavel, determinados pelas parallelas tiradas respectivamente de M e M' ás asymptotas oppostas. Sob esta fórma mais apreciavel, tal definição indica a principio que a distancia M' E do ponto descrevente M' á recta dada O X, póde diminuir tanto quanto se quizer, sem contudo annular-se a não ser no infinito, como a propria extensão N B, á medida que a transversal N N' tende para a direcção OX. Assim, independentemente de qualquer noção anterior, o logar procurado deve ser asymptotico a cada uma das duas rectas fixas. Vê-se tambem que o ponto dado M deve fazer parte delle, considerando-se a transversal cujo meio estivesse sobre este ponto, a qual desde então tornar-se-hia ahi uma tangente, em virtude da coincidencia espontanea dos dous pontos M e M'.

Para transformar essa equação natural, M' E = N B, em equação rectilinea, convem dirigir os eixos segundo as duas rectas fixas O X e O Y, em virtude do asymptotismo d'ellas. Designando-se por x' e y' as coordenadas correspondentes do ponto variavel M', e por α e β as do ponto dado M, a equação da transversal será

$$y - \beta = \frac{y' - \beta}{x' - \alpha} (x - \alpha) ,$$

e far-se-ha mister exprimir que o valor de $y-\beta$ correspondente a $x = 0$ equivale constantemente a y'. Acha-se assim a equação $x'\ y' = \alpha\ \beta$, que em evidencia annuncia a hyperbole.

Considerando-se directamente a fórma que deve tomar a equação da hyberbole em relação ás duas asymptotas, é facil prever, como já o indiquei (91), que ella só conterá o termo em xy e o constante, pois que os dous termos proprios a cada variavel devem a um tempo desapparecer, em vista do asymptotismo do eixo correspondente. Essa equação, $xy=m^2$, indica geometricamente que o parallelogrammo MPOB, construido sobre as coordenadas asymptoticas de um ponto qualquer, M, da hyperbole, tem uma area invariavel: é debaixo d'esta forma que, a seu modo, conheciam os antigos esta relação necessaria. Si em particular se considera o losango assim formado no vertice, cujo lado equivale evidentemente, segundo as noções anteriores, á metade da distancia do foco ao centro, reconhece-se que a constante m representa aqui a metade da excentricidade. O todo d'estas previsões é facilmente confirmado pela execução do calculo de transposição que, partindo da equação primitiva, $a^2\ y^2 - b^2\ x^2 = -\ a^2\ b^2$, relativa aos eixos da hyperbole, fornece, em relação ás asymptotas, a equação $xy=\frac{a^2+b^2}{4}$, segundo as formulas ordinarias

$$x = x' \cos X' + y' \cos Y', \quad y = x' \operatorname{sen} X' + y' \operatorname{sen} Y',$$

tendo-se em vista as hypotheses actuaes

$$\operatorname{tang} Y' = -\frac{b}{a}, \quad \operatorname{tang} X' = -\frac{b}{a},$$

Em razão da sua superior simplicidade, a equação $xy=m^2$ seria mais propria do que qualquer outra ao estudo especial da curva, si fossem rectangulares os eixos correspondentes; mas, como sabe-se, isto só dá-se para com a hyperbole equilatera, cujo estudo particular não merece mais hoje attenção á parte. Em relação a qualquer outro caso, os inconvenientes ligados á obliquidade de taes eixos fazem mais que compensar ordinariamente a aptidão algebrica de semelhante equação, salvo em relação ás pesquizas geometricas em que a rectangularidade dos eixos não constitue nenhuma vantagem importante. Pode-se no-

tar aqui esta excepção a respeito das tangentes, cujo coefficiente angular, tornado assim $-\frac{y'}{x'}$, fornecerá um resultado muito simples com relação á sub-tangente correspondente, agora igual á abscissa asymptotica do ponto de contacto. Todavia, é mister reconhecer que, no fundo, esta noção constitue apenas uma facil consequencia do theorema das transversaes, o qual, levado até o limite, indica para logo a igualdade constante das duas partes da tangente, comprehendidas entre o ponto de contacto e as duas asymptotas ; de sorte que esta propriedade caracteristica da hyperbole fornece espontaneamente a melhor solução especial do problema das tangentes. Vamos em breve apreciar, para a questão mais importante das quadraturas, a vantagem essencial que, a certos respeitos, apresenta a simplicidade superior da equação asymptotica da hyperbole.

O judicioso emprego das propriedades relativas ás asymptotas, torna mais facil na hyperbole do qne na eclipse a construcção final segundo a qual se determinam graphicamente todos os elementos geometricos da curva por meio de uma porção qualquer da sua circumferencia. Começar-se-ha, como na ellipse, por traçar, com auxilio de dous pares distinctos de cordas parallelas, um systema de diametros conjugados, cujo comprimento, quanto ao que for transverso, será assim espontaneamente conhecido, e em seguida facilmente assignavel para o outro com auxilio de um dos pontos do arco dado, de accôrdo com as nossas anteriores explicações. Mas, depois deste preambulo graphico commum ás duas curvas, todo o resto da construcção poderá tomar aqui uma marcha mais simples do que na ellipse, determinando-se logo as asymptotas pelas diagonaes do parallelogrammo correspondente aos dous diametros obtidos. Isto posto, a direcção dos eixos da hyperbole resultará immediatamente da bissecção dos dous angulos asymptoticos, e afinal se achará o comprimento de cada um debaixo de muitas formas commodas, sobretudo como media proporcional entre as duas distancias de um ponto do arco as duas asymptotas, medidas parallelamente ao eixo procurado, ou entre a coordenada correspondente desse ponto e a da intersecção da sua tangente com este eixo, etc., de maneira a fornecer commodamente diversos modos de verificação para o conjuncto do traçado.

117.— Entre os numerosos problemas, determinados ou indeterminados, que suggere naturalmente a theoria da hyperbole, bastará aqui escolher alguns, que permittirão ao leitor multiplicar espontaneamente esses uteis exercicios.

Consideremos primeiro a determinação de uma hyperbole por meio de uma asymptota e de tres pontos. A lei das transversaes logo indica uma commoda solução graphica, fundada sobre a construcção prévia da segunda asymptota, da qual este theorema fornece facilmente dous pontos, com auxilio das duas cordas que unem um dos pontos dados aos outros dous, prolongadas desde já até a asymptota conhecida. Quanto á solução analytica, simplificar-se-ha muito, si os eixos são disponiveis, tomando-se para eixo dos y a asymptota, e fazendo-se passar o dos x por dous dos pontos: a obliquidade de taes eixos nenhum obstaculo trará demais a esta investigação, á vista da natureza das condições propostas. Assim, a equação da hyberbole, em virtude do asymptotismo, será

$$bxy + cx^2 + ex = 1.$$

Tendo-se em attenção as abscissas x'' e x''' dos dous primeiros pontos dados, as quaes deverão tornar-se as raizes da equação $cx^2 + ex = 1$, e formulando-se em seguida a passagem ao outro ponto, x', y', obter-se-ha finalmente

$$c = -\frac{1}{x''\,x'''}, \qquad e = \frac{x''+x'''}{x''\,x'''}, \qquad b = \frac{x''\,x''' + x'^2 - x'\,(x''+x''')}{x'\,y'\,x''\,x'''}.$$

Segundo estas formulas, todos os casos de impossibilidade serão necessariamente de natureza precisa, conforme as indicações geometricas; tornar-se-hiam ellas infinitas si x'' ou x''' se annullasse, o que collocaria um dos primeiros pontos sobre a asymptota; além disso, a terceira o poderia ser tambem, devido á annullação de x' ou y', do que resultaria a situação do outro ponto ou igualmente sobre a asymptota ou em linha recta com os precedentes. Deve-se enfim notar o caso de $b = 0$ que não é mais admissivel do que aquelles: então é necessario considerar o numerador como equivalente ao producto $(x' - x'')\,(x' - x''')$, de sorte que esta hypothese reduz-se a $x' = x''$ ou $x' = x'''$, isto é, que uma das duas cordas tiradas do ultimo ponto aos dous primeiros tornar-se-hia parallela á asymptota dada. Os analogos graphicos d'estes diversos symptomas de impossibilidade são de facil apreciação.

Supponhamos agora que dous dos pontos precedentes sejam substituidos pelo vertice. Considerando-se este como equidistante das duas asymptotas, continuará quasi tão facil como acima a construcção para achar em primeiro logar a segunda asymptota, sendo esta assim tangente a um circulo facilmente assignavel e passando ainda em um ponto conhecido ; apenas, este traçado assignala aqui, alem dos casos precisos de impossibilidade já considerados, um caso vago devido á situação do ponto no circulo. A solução analytica deverá agora fazer preferir para eixos rectangulares a asymptota e sua perpendicular no vertice. Partindo da mesma equação que acima, a abscissa d d'este ultimo ponto e as coordenadas x', y', do primeiro fornecerão a principio as duas condições

$$cd^2 + ed = 1, \quad bx'y' + cx'^2 + ex' = 1,$$

que será mister completar caracterisando analyticamente o vertice. Para isto, o modo mais em harmonia com o todo da questão actual, consiste em exprimir a equidistancia ás duas asymptotas, como na solução graphica. De facto, aqui, o methodo subsidiario conduz logo por uma divisão monomia á equação da segunda asymptota, $y = -\frac{c}{b}x - \frac{e}{b}$, cuja distancia ao vertice dado fornece facilmente a terceira condição procurada, $2cd + e^2 = b^2d^2$. As duas primeiras permittiriam sem difficuldade a reducção previa de c e e á unica incognita, b, desde então determinada por uma equação do segundo grau, que convido o leiror a discutir.

Supprimindo-se n'esta equação o segundo ponto dado, x', y', torna-se ella indeterminada, mas segundo a justa medida que comporta a pesquiza dos logares. Proponhamo-nos achar o dos focos. Os eixos precedentes ficam muito convenientes, em virtude da evidente symetria de um tal logar. Mas, bem que a equação acima permittisse sem duvida, segundo os nossos principios geraes, ou conforme a construcção especial, a introducção do foco, é preferivel empregar um outro typo analytico, directamente fundado sobre a equação focal,

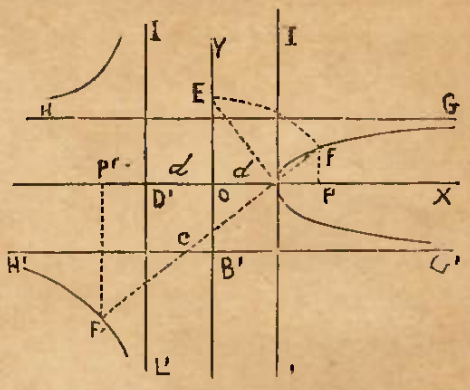
$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = (px + qy + r)^2,$$

em que as condições de asymptotismo dariam a principio $q = 1$, $r = -\beta$, para a suppressão necessaria dos termos em y só. Assim modificada, como precedentemente,

$$2pxy + (p^2 - 1)x^2 + 2(\alpha - p\beta)x = \alpha^2$$

a passagem ao vertice dado forneceria uma primeira condição, $(p^2 - 1)\, d^2 + 2\,(\alpha - p\beta)\, d = \alpha^2$, que ficaria por completar á vista do caracter de tal ponto. Entre os diversos modos que comporta, o mais simples consistiria aqui na rectangularidade entre a tangente correspondente e a recta que vai deste ponto ao centro, $x = 0$, $y = \beta - \frac{\alpha}{p}$. Esta segunda relação, estando uma vez formada, permittiria eliminar p com auxilio da primeira, de maneira a fornecer a equação procurada, $y^2 = \frac{d^2(x-d)}{x+d}$, por um calculo cuja execução deixo ao leitor.

A definição d'esse logar indica naturalmente, tendo-se em vista as noções especiaes, uma descripção por pontos, que conduziria mais simplesmente á equação precedente, e que demais annuncia já a fiigura geral de uma tal curva. Com effeito, considerando-se a asymptota dada como o logar espontaneo do centro, cada posição C d'este ponto determinaria a posição correspondente do foco F (*fig.* 76) pela intersecção da recta C D que o unisse ao vertice fixo D com um circulo descripto de C passando em E, onde a perpendicular D E ao eixo variavel da hyperbole corta a asymptota O Y. Em vista d'isto, quando este eixo CD tende para seu limite horizontal OX, a ordenada F P, sempre inferior a D O ou d, tende a tornar-se igual a ella, segundo a constante semelhança dos triangulos F D P e E O D, cujas hypothenuzas tendem então para a igualdade. Assim, a parte recta da curva procurada está symetricamente comprehendida entre duas asymptotas horizontaes, B G e B'G', tiradas á distancia d de seu eixo O X. Uma comparação analoga mostrará, em sentido inverso, que estas asymptotas convêm tambem á parte esquerda correspondente ao segundo foco, F', cuja ordenada F'P' decrescerá simultaneamente, tendendo para seu limite inferior d. Si agora, ao contrario, aproxima-se o eixo variavel D Ç do seu limite vertical D I, vê-se



(Fig. 76)

que o foco F tenderá para o vertice dado D, ao passo que o outro avançará continuamente para a vertical opposta D'L' alem da qual elle não deixará de estar sinão no infinito ; de sorte que a segunda porção do logar, interrompida de O Y a I'L', se achará symetricamente comprehendida entre asymptotas rectangulares. O leitor reconhecerá facilmente a conformidade da equação acima obtida com a figura geral que a nossa definição graphica assim indica para esta notavel curva do terceiro grau.

Invertendo a questão precedente, somos levados a procurar o logar dos vertices de todas as hyperboles que tenham uma mesma asymptota e um foco commum. Si, por um evidente motivo de symetria, refere-se ainda a hyperbole á asymptota dada e á perpendicular tirada do foco dado, sua equação será, segundo o typo focal e em vista do asymptotismo,

$$2pxy + (p^2 - 1)x^2 + 2dx = d^2,$$

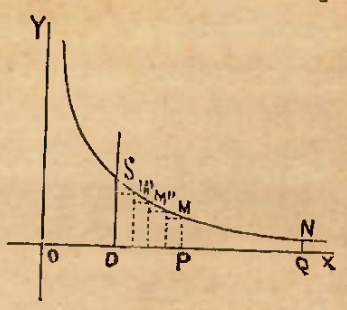
designando d a distancia do foco á asymptota, e p o coefficiente variavel da directriz. Introduzir-se-ha aqui o vertice como estando ao mesmo tempo sobre a hyperbole e sobre a perpendicular, $y = \frac{1}{p}(x - d)$, tirada do foco á directriz, o que, pela eliminação de p, conduzirá facilmente á equação procurada, $y^2 = \frac{a^2(d-x)}{d+x}$, ja discutida na terceira parte d'este tratado.

A discripção especial, de que esta curva seria mais facilmente susceptivel que a precedente, confirmaria claramente a forma resultante d'esta equação, que aliás poderia assim ser obtida com muita simplicidade.

Si n'este ultimo problema se substituisse o foco dado por uma directriz, seria superfluo procurar nenhum dos logares correspondentes ; porquanto a theoria da semelhança indica d'ante-mão, em relação a todas as hyperboles que tenham uma asymptota e uma directriz communs, que esse logar nunca poderia resultar sinão de logares rectilineos, convergindo todos para a intersecção d'aquellas duas rectas.

118. — Só falta-nos agora considerar a hyperbole relativamente á sua quadratura. Partindo-se da sua equação referida aos eixos, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, a medida do segmento hyperbolico

não se tornaria accessivel aos nossos methodos elementares a não ser sob a forma de serie. Entretanto percebe-se logo, como na ellipse, segundo o principio de Wallis, a reducção espontanea do caso geral ao da hyperbole equilatera, do qual desde então poderemos occupar-nos exclusivamente, embora não offereça esta simplificação nenhuma vantagem importante. Mas, considerando-se a equação asymptotica, $xy = m^2$, pode-se descobrir uma lei muito notavel para a aria correspondente SDMP (*fig.* 77) contada do vertice. Si se transporta a origem para D, de accordo com os nossos habitos de quadratura, esta equação



(Fig. 77)

torna-se em $y = \frac{m^2}{m+x}$, e o desenvolvimento do quociente em serie dá facilmente

$$y = m - x + \frac{x^2}{m} - \frac{x^2}{m^2} + \text{etc.}$$

D'ahi resulta para a aria procurada á muito simples serie

$$\frac{S}{m^2} = \frac{x}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \text{etc.},$$

na qual a algebra ensina a reconhecer o desenvolvimento do logarithmo neperiano de $1 + \frac{x}{m}$. Acha-se assim finalmente, remontando á antiga origem das abscissas, a formula $S = m^2 l\left(\frac{x}{m}\right)$, segundo a qual este segmento hyperbolico, de que outro qualquer poderia derivar, cresce como o logarithmo da relação de suas duas abscissas extremas.

Este importante resultado pode ser essencialmente confirmado, independentemente da nossa theoria geral das quadraturas, por uma apreciação especial da somma dos rectangulos elementares que a principio substituir-se-hia ao segmento SDMP, considerando-se n'elle diversos pontos intermediarios M', M'', etc, cuja repartição ainda não fixamos. Si x', y' e x'', y'', etc. designam as coordenadas destes vertices auxiliares, os rectangulos successivos terão para medida $r = y'(x' - m)$, $r' = y''(x'' - x')$,

$r'' = y'''(x''' - x'')$, etc. Referindo-se aqui as ordenadas ás abscissas, por meio da equação $xy = m^2$, ter-se-ha finalmente

$$r = m^2\left(1 - \frac{m}{x}\right), \quad r' = m^2\left(1 - \frac{x'}{x''}\right), \quad r'' = m^2\left(1 - \frac{x''}{x'''}\right), \text{ etc.}$$

Ora, estas expressões mostram que todos estes rectangulos parciaes tornar-se-hiam equivalentes, fazendo crescerem as abscissas intermedias ou decrescerem as ordenadas correspondentes em progressão geometrica, como para o nosso primeiro methodo elementar de quadratura, qualquer que fosse aliás a razão desta progressão. Em tal hypothese, um segundo segmento hyperbolico M P N Q equivaleria necessariamente ao primeiro, si a sua ordenada final N Q estivesse em progressão geometrica com as ordenadas extremas S D e M P deste ; pois que poder-se-hia assim inscrever nelle um semelhante numero de rectangulos iguaes aos da serie primitiva, uma vez que as alturas delles prolongassem a mesma progressão, devendo aliás a relação constante destas duas sommas analogas estender-se até os respectivos limites. A aria S D M P augmenta, pois, em progressão arithmetica, quando a abscissa final O P cresce em progressão geometrica, o que é exactamente conforme com a lei analytica acima obtida, segundo a correspondencia fundamental entre a marcha dos logarithmos e a dos numeros. Todavia esta consideração especial é menos completa que a nossa apreciação geral nisto — que a lei da variação das arias hyperbolicas não assigna-lhe a medida propria de cada segmento, mas sómente sua relação effectiva para com um segmento inicial cuja determinação ficaria então por fazer.

Vê-se assim como a quadratura da hyperbole ordinaria, que vimos (80) escapar, ao menos directamente, á regra analytica que convem a todas as outras hyperboles, é sujeita a uma lei distincta, que, no entanto, entra a seu modo nessa formula commum quando se lhe applicam os meios proprios á avaliação dos symbolos indeterminados. Si se estende o conjuncto da aria hyperbolica desde o vertice até uma ou outra asymptota, as duas demonstrações precedentes annunciam semelhantemente que estas duas arias, actualmente iguaes, são ambas indefinidas, quer como proporcionaes ao logarithmo de um numero infinitamente grande, quer como augmentando indefinidamente por graus equivalentes ; ao passo que, em relação a

qualquer hyperbole de grau mais elevado, reconheçemos que uma dessas arias é finita e a outra infinita.

Nossa theoria das quadraturas fornece facilmente a medida dos volumes resultantes da rotação da hyperbole em torno de cada um dos seus eixos. Si a principio considera-se o hyperboloide descontinuo, produzido em torno do eixo transverso, será preciso, para não perturbar os nossos habitos analyticos, levar a origem para o vertice, no qual sómente começa o segmento gerador, adoptando-se a equação $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$. Por meio da regra ordinaria, a qual reduzirá esta cubatura á quadratura de uma parabàla, achar-se-ha assim a formula

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(\frac{1}{3} x + a \right)$$

analoga á do segmento espherico. Quanto ao hyperboloide continuo, correspondente a revolução da curva em torno do eixo não transverso, poder-se-ha conservar a equação ordinaria $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$, desembaraçando-se x em logar de y, pois que a rotação faz-se agora n'outro sentido. O resultado, dependente ainda da quadratura da parabola, será desde então

$$V' = \pi \frac{b^2}{a^2} y \left(\frac{1}{3} y^2 + b^2 \right).$$

CAPITULO V

APRECIAÇÃO DAS CURVAS DO SEGUNDO GRAU COMO SECÇÕES CONICAS

119. — Depois de ter estudado sufficientemente as principaes propriedades da parabola, da ellipse e da hyperbole, resta-nos considerar estas tres curvas sob um ultimo aspecto commum, mais proprio que nenhum outro para fazer apanhar-se claramente o conjuncto da sua figura, concebendo-as, conforme a noção inicial dos antigos, como secções de um cone ou de um cylindro por um plano diversamente situado. Toda linha póde ser encarada de uma infinidade de maneiras, como a intersecção de duas superficies, e, quando estas podem ser facil-

mente concebidas como resultantes do movimento de linhas mais simples, nenhuma descripção directa póde caracterisar com tamanha clareza a fórma de uma curva como tal penetração. E' assim que, entre outras, as curvas do n. 22 são sobretudo apreciaveis a titulo de secções planas de um toro. Partindo da linha recta e do circulo, naturalmente indicados n'uma multidão de phenomenos quotidianos, as primeiras curvas regulares que o espirito humano tem inventado na realidade foram, com effeito, imaginadas por esse modo, quando os geometras gregos pensaram em combinar entre si as mais simples superficies geradas por estas duas linhas primordiaes.

Si se tratasse aqui de considerar em geral todas as intersecções de superficies proprias a produzir as curvas do segundo grau, a questão exigiria necessariamente a geometria a tres dimensões. Mas, como devemos limitar-nos á combinação a mais propria a aperfeiçoar o estudo de taes linhas, esta apreciação complementar, sem pertencer expontaneamente á geometria plana, póde facilmente entrar nella com auxilio de um artificio especial, que, generalisado quanto possivel, se estenderia igualmente ás secções planas de qualquer superficie de revolução. Applical-o-hemos sómente ao cylindro e ao cone considerados em geometria elementar, isto é, a um só tempo circulares e rectos, que, como sabe-se, tornam-se então excepcionalmente os mais simples dos corpos redondos. Bem que o primeiro caso esteja facilmente comprehendido no segundo, e comquanto o cylindro não possa fornecer sinão uma das nossas tres curvas, a sua imagem mais clara ainda e mais familiar deve determinar-nos a encaral-o desde logo distinctamente.

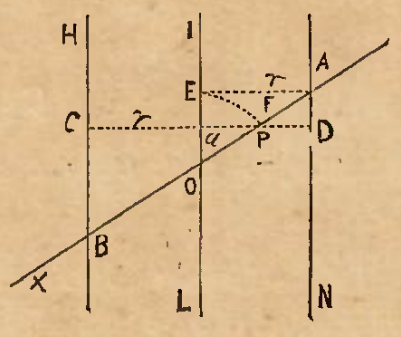


Fig. 78.

Concebendo-se um cylindro gerado por uma recta, AN (fig. 78), em torno de um eixo parallelo IL, as secções planas desta superficie são immediatamente conhecidas como em qualquer outro corpo redondo, quando são perpendiculares ao eixo. Ora, é partindo de taes circulos que, por um methodo especial, póde-se descobrir a natureza ou formar a equação do corte que

resultaria de um plano qualquer, sem realmente sahir do dominio da geometria a duas dimensões. Qualquer que seja este plano, necessariamente a secção será sempre symetrica em torno do seu traço A B sobre o plano que lhe fosse tirado perpendicularmente pelo eixo da superficie. Quanto ao cylindro em particular, a curva terá além disso para centro evidente o ponto em que seu plano corta este eixo. Colloquemos, pois, neste ponto a origem de dous eixos rectangulares situados no plano desta curva e dos quaes um coincida com o dito traço. Afim de achar a relação de uma abscissa qualquer OP para a ordenada correspondente, basta tirar por P, perpendicularmente ao eixo do cylindro, um plano auxiliar que cortará a superficie, segundo um circulo de que C P D será o diametro. Desde então, esta ordenada, expontaneamente commum ás duas curvas, fornecerá, em relação á segunda, a relação constante $y^2 = \text{P D} \times \text{P C}$, que póde aqui considerar-se como a equação natural da secção obliqua. Para della deduzir-se a equação definitiva, não falta mais que referir os factores PD e PC á abscissa OP ou x, com auxilio das constantes do problema, que são o raio r do cylindro e a inclinação α de seu eixo sobre o plano secante. Ora, sendo conhecida a somma destas duas linhas, tudo se reduz a calcular P D por meio do triangulo P A D, que dá

$$\text{P D} = \text{A P} \operatorname{sen} \alpha = (\text{A O} - x) \operatorname{sen} \alpha = \left(\frac{r}{\operatorname{sen} \alpha} - x\right) \operatorname{sen} \alpha =$$

$$r - x \operatorname{sen} \alpha.$$

Resulta logo a equação da curva procurada

$$y^2 + x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = r^2.$$

Esta secção, pois, é sempre uma ellipse, cujo pequeno eixo equivale constantemente ao diametro do cylindro, sendo a relação dos eixos igual ao seno da inclinação do seu plano sobre o eixo da superficie. Tal é o modo o mais simples por meio do qual se possa imaginar claramente a ellypse. Vê-se assim que sobre um mesmo cylindro poderá conceber-se ellipses de todas as fórmas, mudando a obliquidade dos cortes, mas não de todas as grandezas. A excentricidade é aqui igual á projecção, O E, da metade do grande eixo, O A, sobre o eixo do cylindro, o que permittirá marcar os fócos facilmente.

120. — Consideremos agora o caso do cone, principal objecto deste capitulo, concebendo esta superficie como gerada pela rotação de uma recta G'SG invariavelmente ligada ao eixo fixo C'SC que ella encontra sempre em S. Cada cone será sufficientemente definido pelo angulo constante, β, desta geratriz com o dito eixo. Suppondo que a fig. 79 seja traçada no plano tirado pelo eixo do cone perpendicularmente ao da secção procurada, referiremos esta curva a dous eixos rectangulares, um dos quaes, AX, coincide, da mesma sorte que em relação ao cylindro, com a intersecção destes dous planos; além disso, para mais uniformidade, collocaremos a origem no ponto A, onde com facilidade póde provar-se que a tangente á curva será constantemente perpendicular ao seu eixo geometrico AX. Isto posto, tirando-se, como acima, pela extremidade P de uma abscissa qualquer, uma secção auxiliar, perpendicularmente ao eixo da superficie, ter-se-ha semelhantemente $y^2 = PD \times PE$, podendo-se aliás exprimir em funcção de x estes dous factores variaveis, com auxilio dos dados, linear e angular, que definem o plano secante, por meio da distancia d do vertice da curva ao do cone, e da inclinação α de seu eixo geometrico sobre a geratriz SA. Ora, o triangulo APD fornece immediatamente a expressão de $PD = x \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \beta}$ Quanto a PE, referil-o-hemos a principio a PB ou $AB - x$, no triangulo PBE que dá

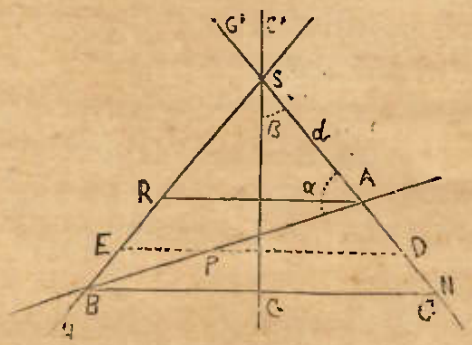


Fig. 79

$$PE = (AB - x) \frac{\text{sen } (\alpha + 2\beta)}{\cos \beta},$$

avaliando o angulo B por meio do triangulo BAS: este ultimo triangulo permitte em seguida eliminar $AB = \frac{d \text{ sen}^2 \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$. Dahi resulta finalmente para a curva procurada a equação

$$y^2 + \frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } (\alpha + 2\beta)}{\cos^2 \beta} x^2 - 2d \text{ sen } \alpha \text{ tang } \beta . x = 0.$$

A secção de um cone por um plano é, pois, sempre uma curva do segundo grau: é nisto que consiste aqui a nossa proposição principal; porquanto, de accordo com esta noção, a inspecção directa da figura permitte facilmente caracterisar as situações proprias a fornecer successivamente a parabola, a ellipse e a hyperbole. Segundo a regra analytica ordinaria, estes tres casos corresponderão a $\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + 2\beta < 180°$, $\alpha + 2\beta > 180°$, o que indica o plano secante, quer como parallelo á geratriz opposta, quer como encontrando-a abaixo do vertice S, quer emfim como encontrando-a acima deste ponto.

Vê-se, com effeito, que o logar será desde então limitado de um lado e illimitado do outro, ou fechado de todos os lados, ou emfim illimitado e discontinuo entre as duas folhas do cone. Concebendo-se assim as tres curvas do segundo grau, apresenta-se logo a ellipse espontaneamente, depois a parabola, em seguida a hyperbole, afastando-se gradualmente da secção perpendicular ao eixo, a qual constitue aqui o ponto de partida natural: a situação parabolica torna-se então o limite commum das situações ellypticas e das hyperbolicas. Para os antigos, que não consideravam habitualmente sinão secções perpendiculares á geratrizes, cada uma d'estas tres linhas exigia um cone differente: a parabola correspondia ao cone rectangular, em que é recto o angulo das geratrizes oppostas, a ellipse ao cone acutangulo, a hyperbole ao obtusangulo.

Póde-se encarar a equação precedente como representando tambem as secções cylindricas, suppondo ahi nullo o angulo β do cone; mas então é mister transformar o ultimo coefficiente, afim de evitar a indeterminação que logo produz a hypothese simultanea de d infinito, substituindo este comprimento por um outro que deva ficar finito, tal como a distancia r do vertice da secção ao eixo da superficie, distancia que equivale a $d\text{sen}\beta$. Fazendo-se em seguida $\beta = 0$, obtem-se a equação $y^2 + \text{sen}^2\,\alpha.\,x^2 - 2r\,\text{sen}\,\alpha.\,x = 0$, que não póde mais representar sinão uma ellipse, de conformidade com o numero precedente, em que a origem, agora no vertice, estava no centro.

Bem que o artificio empregado n'estes dous casos deva ser em breve substituido pelos methodos geraes fornecidos espontaneamente pela geometria a tres dimensões, para todas as in-

tersecções de quaesquer superficies, contudo, como é sempre util, ao menos logicamente, generalisar o quanto possivel cada processo scientifico, convem sentir que este é mais extenso do que ordinariamente suppõe-se, e torna-se essencialmente applicavel a todos os corpos redondos, por meio do conhecimento previo da curva meridiana destes corpos. Para convencer-se melhor disso, deverá o leitor applical-o a alguma outra superficie de revolução sufficientemente simples, estudando assim, por exemplo, as secções planas do paraboloide.

121. — Afim de esclarecer o mais possivel a noção das curvas do segundo grau como secções conicas, é mister agora achar de novo sobre o cone os principaes elementos geometricos que o estudo especial de cada uma d'ellas successivamente offereceu-nos.

Esta apreciação final é a principio muito facil em relação á parabola, cuja equação é aqui $y^2 = 4\,d\,\text{sen}^2\,\beta.\,x$, em virtude da hypothese caracteristica $\alpha + 2\,\beta = 180^o$. D'esta expressão do parametro póde-se facilmente deduzir a construcção conica do foco, em que se deve assim vêr a projecção, sobre o eixo da parabola, da projecção do vertice desta curva sobre o eixo do cone. D'ahi resulta, reciprocamente, um modo muito simples de transportar para um cone dado uma dada parabola. De facto, considerando-se a distancia do foco ao vertice como base de um triangulo rectangulo cujo angulo opposto seja igual ao do cone, a hypothenuza deste triangulo medirá a distancia do vertice da parabola ao eixo do cone, o que permittirá com facilidade collocar a secção.

Quanto á ellypse, determinar-se-hão os seus eixos comparando a equação geral do numero precedente á da curva referida ao vertice,

$$y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - 2\,\frac{b^2}{a}\,x = 0,$$

o que dá

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(\alpha + 2\,\beta)}{\cos^2\beta},\quad \frac{b^2}{a} = d\,\text{sen}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta.$$

Da combinação destas duas relações resultam as formulas

$$a = \frac{d\,\text{sen}\,\beta\cos\beta}{\text{sen}\,(\alpha + 2\,\beta)},\quad b = d\,\text{sen}\,\beta\,\sqrt{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha+2\,\beta)}}.$$

A primeira indica que o grande eixo da ellypse é sempre a recta AB resultante da intersecção da curva com o plano que lhe é tirado perpendicularmente pelo eixo do cone, segundo as evidentes indicações do assumpto. Quanto á segunda, a sua interpretação conica é menos directa; mas é facil reconhecer nella o semi-eixo pequeno como uma media proporcional entre as distancias das duas extremidades A e B do grande eixo ao eixo do cone. Combinando-se convenientemente estas duas determinações, deduzir-se-ha a construcção conica dos focos; mas póde-se tambem obtel-a immediatamente com mais simplicidade, de maneira a melhor esclarecer o conjuncto de uma tal concordancia. E' preciso observar que, em virtude d'estas noções, a distancia dos focos é sempre igual a parte A N ou B R da geratriz, comprehendida entre os dous planos perpendiculares ao eixo do cone, que circumscrevem a ellipse considerada. Esta relação resulta de um theorema elementar, pouco conhecido e, demais, pouco util, que constitue uma consequencia indirecta do theorema de Pythagoras, e consiste em que em todo trapezio isosceles tal qual A N B R, o quadrado da diagonal equivale ao quadrado do lado igual mais o rectangulo dos lados desiguaes. Si, pois, toma-se sobre A B, a partir do meio para ambos os lado, a metade de A N, marcar-se-hão os dous focos da ellipse.

Invertendo-se as relações precedentes, torna-se facil, reciprocamente, collocar sobre um cone dado uma eclipse dada. Graphicamente póde-se logo reproduzir facilmente, no plano da ellipse, os triangulos A N B e B R A, tomando para base commum a distancia entre os focos, e para angulo adjacente o complemento do angulo do cone ou o suplemento d'este complemento, sendo alem disso o lado opposto igual ao grande eixo. Os terceiros lados assim obtidos indicarão os dobros das distancias do eixo do cone aos dous vertices, A e B, da ellipse proposta, o que permittirá collocal-a com facilidade. Esta construcção faz ser a questão sempre possivel, quaesquer que sejam a ellipse e o cone, pois que esses triangulos jamais poderão offerecer o caso de impossibilidade, por ser o lado opposto ao angulo dado constantemente superior ao lado adjacente. Um mesmo cone, qualquer que elle seja, póde pois fornecer todas as ellipses imaginaveis. Em torno de um vertice fixo A, elle

apresentará todos os graus de ellipticidade, fazendo-se variar a inclinação α, e depois a direcção circular do plano secante até a situação parabolica; em seguida para cada um destes graus as dimensões variarão á vontade, transportando-se parallelamente a secção a uma distancia conveniente do vertice do cone.

Si, em vez de executar graphicamente esta dupla determinação, quer-se operar algebricamente, bastará inverter as duas relações fundamentaes, considerando-se a e b como dados, para buscar-se α e d. A segunda incognita resultaria commodamente da primeira, que se tratará pois de desembaraçar na equação trigometrica $\frac{\operatorname{sen}\ \alpha \operatorname{sen}\ (\alpha + 2\ \beta)}{\cos^2 \beta} = \frac{b^2}{a^2}$. Simplificar-se-ha muito esta relação transformando-se o numerador por meio de um theorema conhecido, em

$$\frac{1}{2}\Big(\cos^2 2\beta - \cos 2(\alpha = \beta)\Big),$$

o que dará para o angulo auxiliar, $2(\alpha+\beta)$, o resultado mu simples

$$\cos 2\ (\alpha + \beta) = 2 \cos^2 \beta \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 1,$$

em que facilmente se poderá verificar a constante possibilidade da questão, por ter sempre esta formula um valor não só real, mas inferior á unidade, segundo as condições de um tal modo.

Consideremos, emfim, o caso da hyperbole, em relação á qual facil é mostrar desde logo a permanencia essencial de todas as noções precedentes a respeito dos diversos elementos geometricos que lhe são commums com a ellipse. A unica apreciação especial que deva deter-nos aqui, refere-se ás asymptotas, cuja interpretação conica importa sentir claramente. Quer pela figura, quer por meio da equação, chega-se a isto naturalmente, observando-se que a inclinação dellas sobre o eixo transverso da hyperbole deve ser a mesma para todas as secções parallelas que, geometricamente, serão sempre semelhantes, ou, analyticamente, terão eixos proporcionaes. Desde então, fazendo-se gradualmente approximar o plano secante do vertice do cone, sem nunca mudar a sua direcção, tocar-se-ha finalmente um limite em que a situação das asymptotas se tornará irrecusavel, quando a secção se reduzir a estas rectas,

em virtude da passagem do plano pelo vertice. Tal é, pois, a origem conica das asymptotas da hyperbole, sempre parallelas ás geratrizes segundo as quaes o cone é cortado por um plano tirado do seu vertice parallelamente ao da secção. Póde-se além disso verificar esta construcção, reconhecendo, segundo a formula ordinaria dos angulos triedros, que cada uma destas geratrizes fórma com o eixo da hyperbole um angulo igual ao ao que tem para tangente $\frac{b}{a}$ ou $\frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\text{sen } \alpha \text{ sen } (\alpha + 2\beta)}$. De facto, considerando-se o angulo triedro cujas arestas fossem essas duas rectas e o eixo do cone, um dos seus angulos diedros seria recto e comprehendido entre duas faces uma das quaes seria $\beta + \alpha - 180^{\circ}$, e a outra constituiria a inclinação procurada φ, sendo β a terceira face; resultaria, pois,

$$\cos \beta = \cos \varphi \cos (\beta + \alpha - 180^{\circ}),$$

d'onde conclue-se uma expressão do tang φ exactamente equivalente á precedente.

Segundo estas noções, existe sobre cada cone um limite necessario para o grau de abertura das diversas sortes de hyperboles que n'elle se possam traçar, pois que o afastamento das asymptotas nnnca poderia exceder ao das geratrizes oppostas. A hyperbole a mais aberta corresponde, pois, sempre a um plano parallelo ao eixo do cone; de sorte que, passando esta situação *maximum*, a hyperbole, em vez de afastar-se mais da figura parabolica que tinha constituido seu ponto de partida, aproximar-se-hia d'ella necessariamente. Esta previsão directa está plenamente conforme com as condições de possibilidade que então exige o problema já resolvido em relação a ellipse, o qual consiste em collocar sobre um cone dado uma dada curva. Com effeito, na determinação graphica, os triangulos analogos a ANB e BRA não serão mais sempre possiveis, pois que o lado opposto ao angulo conhecido achar-se-ha agora inferior ao lado adjacente. O limite terá logar quando estes triangulos tornarem-se rectangulos, o que exige $\cos \beta = \frac{a}{c}$, d'onde $\text{tang } \beta = \frac{b}{a}$, de sorte que o angulo do cone deve ser ao menos igual á metade do angulo das asymptotas da hyperbole, conforme a regra precedente. A solução trigonometrica reprodu-

ziria a seu modo a mesma condição, dando então por meio da mudança costumada de b^2 em $-b^2$, a formula

$$\cos 2(\alpha + \beta) = 2\cos^2\beta \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - 1,$$

que, sem cessar de ser real, póde agora adquirir um valor superior á unidade, si cos β n'ella exceder a $\frac{a}{c}$.

Taes são as diversas noções essenciaes relativas á apreciação especial das curvas do segundo grau como secções do cone circular recto. Bem que não convenha mais hoje retomar, neste ponto de vista, segundo o modo analytico, o estudo inteiro dessas linhas, é entretanto mister notar ahi a origem naturalissima de muitas determinações importantes. Isto é sobretudo sensivel para a theoria da semelhança, segundo a consideração elementar da constante semelhança geometrica das diversas secções parallelas de uma pyramide e, por conseguinte, de um cone. Dahi resulta logo que duas parabolos são constantemente semelhantes, como podendo sempre collocar-se parellelamente sobre um mesmo come; ao contrario, duas ellipses ou duas hyperboles não o serão sinão quando os seus planos poderem assim tornar-se parallelos, o que, a vista das formulas precedentes, exige que os seus eixos sejam proporcionaes ou suas symptotas igualmente inclinadas. Concebe-se tambem que, sob este aspecto conico, a questão das tangentes nunca poderia offerecer, em relação a essas tres curvas, nenhuma outra difficuldade real além da de transformar uma construcção no espaço em uma construcção plana; pois que a tangente á secção se acha então determinada espontaneamente, em cada ponto, pela intersecção do plano da curva com o plano tangente á superficie, o qual póde determinar-se facilmente por meio da tangente correspondente á base circular do cone.

122. A destinação propria a este capitulo complementar teve de reduzir-nos ao exame do cone recto, como sendo a mais simples superficie d'onde possam resultar as tres curvas do segundo grau. Mas não é inutil observar, ao terminal-o, que o artificio adoptado conviria tambem ao cone circular obliquo, bem que este não seja mais uma superficie de revolução, pelo menos limitando-nos a considerar n'elle secções perpendiculares ao plano principal do cone, isto é, ao tirado

pelo eixo perpendicularmente ao da base, que desde então contem as duas geratrizes *maximum* e *minimum*. Procedendo exactamente como acima, achar-se-ha para a equação analoga da secção que faz um angulo, α, com uma destas geratrizes, designando sempre d a distancia do vertice da curva ao do cone,

$$y^2 + \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\gamma + \delta - \alpha)}{\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\delta} x^2 - d \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\gamma + \delta)}{\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\delta} x = 0,$$

sendo então o cone definido por meio dos dous angulos distinctos, γ e δ, que formam estas geratrizes extremas com o plano da base. A mais interessante consequencia que agora fornece tal equação, refere-se á determinação das secções circulares. Vê-se que, para obter um circulo, é preciso suppor $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\gamma + \delta - \alpha) = \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\delta$, d'onde resultam as duas soluções $\alpha = \gamma$, $\alpha = \delta$, das quaes uma indica de ordinario um plano parallelo á base, e a outra corresponde, por excepção, a uma certa secção obliqua que os antigos qualificavam judiciosamente de *anti-parallela*: estas duas direcções não poderiam coincidir sinão quando o cóne se tornasse recto.

Esta importante proposição, que convém notar aqui em razão de sua utilidade especial em muitas occasiões, sobretudo em geographia, não constitue aliás, como em breve será reconhecido, mais que um simples caso particular da propriedade geral, segundo a qual todas as superficies do segundo grau, a excepção de uma só, comportam sempre duas sortes de secções circulares, cujos planos não se confundem sinão quando a superficie é de revolução.

CAPITULO VI

APPLICAÇÃO GERAL DO ESTUDO DAS CURVAS PLANAS Á CONSTRUCÇÃO DAS EQUAÇÕES DETERMINADAS

123.— Terminando o estudo elementar da geometria plana, estudo a principio geral, em seguida especial, importa caracterisar summariamente a applicação natural do conjuncto das noções assim adquiridas á *construcção* das equações a uma só incognita. No começo deste tratado, temos considerado a

construcção das formulas propriamente ditas, fornecidas pela resolução das equações, a qual consistia na simples substituição das operações graphicas aos calculos arithmeticos indicados para a avaliação de cada resultado. Trata-se agora de uma transformação a um tempo mais difficil e mais importante, em que a figura deve supprir o conjuncto total da elaboração abstracta, quer numerica, quer sobretudo analytica, de uma equação que se não possa resolver e cujas raizes reaes sejam entretanto assignaveis graphicamente. Esta util conversão, tantas vezes destinada a compensar bem que incompletamente a extrema imperfeição necessaria da resolução das equações, consiste em conceber essas raizes como as abscissas proprias ás intersecções de duas linhas convenientemente escolhidas, segundo duas equações a duas variaveis susceptiveis de reproduzir a equação proposta, $f(x)=0$ pela eliminação da variavel auxiliar y. Tal condição fundamental póde ser, analyticamente, preenchida por uma infinidade de modos, porquanto ao par qualquer de equações que a ella satisfizesse se poderia sempre substituir muitos ontros equivalentes, devidos a duas combinações distinctas, aliás asbitrarias, dessas equações primitivas.

E' mesmo facil sentir que esta indeterminação subsistiria ainda depois da escolha facultativa de uma das duas equações auxiliares $\varphi(x, y)=0$: porque bastaria, por exemplo, tomar a outra, segundo o typo $\varphi(x, y).\psi(x, y)+f(x)=0$, em que o segundo factor $\psi(x, y)$ designa uma funcção inteiramente arbitraria ; este modo analytico, sem ser a este respeito o mais completo, é bastante extenso para fazer aqui sobresahir altamente a extrema diversidade dos systemas de construcção proprios a cada caso. Sob o aspecto geometrico, esta varidade ainda fica mais evidente, além da faculdade de combinar as obscissas procuradas com ordenadas arbitrarias, é claro principalmente que, depois de ter fixado as intersecções propostas póde-se, de uma infinidade de modos, fazer passar por ellas, todas as sortes de linhas que exigem maior numero de pontos para sua determinação.

Esta dupla apreciação indica sufficientemente que toda a difficuldade dessas construcções consiste essencialmente em empregar nellas as linhas mais convenientes ao fim que se tem em

vista. Si, como acontece muitas vezes, a figura só é introduzida a pretexto de artificio logico, o que constitue, no fundo, a alta utilidade de semelhante transformação, deve-se procurar menos simplificar seu traçado effectivo do que tornar sua concepção mais directa e mais expontanea.

Para isto, o melhor modo consiste ordinariamente em combinar uma linha recta com a curva correspondente á equação dada, considerando por exemplo, segundo a fórma mais usada, as raizes reaes de $f(x) = 0$ como as abscissas dos pontos em que a curva encontra o eixo dos x. Mas, comquanto este modo seja constantemente o mais natural, será preciso quasi sempre pôl-o de parte, quando pelo contrario se tratar de utilisar finalmente a figura na determinação effectiva das raizes consideradas: prefere-se então complicar um pouco uma das duas linhas introduzidas afim de poder simplificar mais a outra, segundo uma lei de compensação necessaria adiante explicada.

124. — Para apreciar convenientemente esta applicação fundamental do conjuncto da geometria plana, importa concebel-a habitualmente como igualmente conveniente a todos os generos possiveis de equações determinadas, tanto transcendentes como algebricas. Seja para construir por exemplo a equação $x \operatorname{tang} x = 1$. Em vez do modo natural, que exigiria a consideração de uma curva muito complicada $y = x \operatorname{tang} x$, se poderá a principio combinar a curva trigonometrica facil de conceber-se $y = \operatorname{tang} x$, com a hyperbole equilatera $xy = 1$. Mas um pouco de reflexão fará facilmente sentir que esta ultima curva poderia ser substituida por uma simples linha recta sem que a primeira tornasse-se realmente mais difficil de traçar: porque bastaria considerar a curva $y = \dfrac{1}{\operatorname{tang} x} = \cot x$ como cortada pela bissectriz $y = x$; ora, esta curva, no fundo, nada mais é do que a precedente deslocada horizontalmente de $\dfrac{\pi}{2}$, e voltada em sentido contrario. Semelhante linha sendo composta de uma infinidade de filetes identicos, cada um comprehendido entre as duas ymptotas verticaes, e cujos centros ou inflexões se succedem em intervallos iguaes sobre o eixo horizontal, a

figura indicará claramente uma infinidade de raizes, tendendo cada vez mais a se confundirem com as abscissas das asymptotas visinhas, enforme a discussão abstracta da equação propostas.

Consideremas ainda, na outra classe das equações transcendentes, o caso muito simples $x \log x = a^2$. Aqui o modo mais conveniente consistirá em combinar a logarithmica $y = \log x$ com a hyperbole $x\,y = a^2$; si substituissemos, como acima, esta ultima curva pela recta $y = x$, seriamos então forçados a empregar a curva transcendente $y = \frac{a^2}{log\ x}$ cuja complicação superior faria mais do que compensar a simplificação inherente a esta substituição. Conservando, pois, o primeiro systema, será facil reconhecer que a equação proposta só admitte uma raiz real.

Seja finalmente a equação $x + \text{sen } x = a$. Aqui o melhor modo consistirá evidentemente em cortar a curva dos senos, $y = \text{sen } x$, composta de uma infinidade de ondulações iguaes e alternativas, cujos centros ou inflexões são equidistantes, pela recta $y = a - x$, parallela á segunda bissectriz, e que determinará ordinariamente uma intersecção de uma parte ou da outra do eixo horizontal, salvo o caso do contacto, que só poderia ter lugar no caso de ser o termo dado a um multiplo impar de π. Esta ultima apreciação resulta facilmente da consideração especial da tangente á origem, evidentemente confundida aqui com a primeira bissectriz, segundo o limite natural da relação $\frac{y}{x}$.

125.—Para com as equações algebricas propriamente ditas, os differentes systemas de construcção estão necessariamente sujeitos a uma condição fundamental que importa conhecer, segundo o theorema de algebra que dá, para limite superior do grau da equação final, o producto dos graus das equações a duas incognitas entre as quaes se faz a eliminação. Segundo esta noção geral, os gráus das duas linhas empregadas em construir cada equação determinada, devem pois formar sempre um producto pelo menos igual ao grau desta. Por conseguinte, si uma dessas linhas é recta, a outra será necessaria-

mente do mesmo grau pelo menos que a equação proposta. E' por isso que, afim de obter uma simplificação média, pouco mais ou menos equivalente a respeito das duas linhas introduzidas, deve-se commumente preferir, quando se trata de uma construcção effectiva, elevar o grau de uma para poder baixar o da outra. Appliquemos agora estas noções geraes ás equações dos quatro primeiros graus. No primeiro, as duas linhas podem evidentemente, segundo esta lei, ser simples linhas rectas e este caso corresponde, com effeito, á construcção das formulas racionaes, aliás inteiras ou fraccionarias, sempre reductivel a uma certa reunião de quartas proporcionaes, conforme as explicações especiaes do n. 15.

Quanto á equação do segundo grau, $x^2 + px + q = 0$, uma das duas linhas deverá necessariamente deixar de ser recta, e tornar-se pelo menos uma secção conica.

O modo mais natural consistiria em combinar a parabola, $y = x^2 + px$, com a horizontal $y = -q$. Mas essa curva pode ser facilmente substituida por um circulo que corte o eixo dos x. Porque, fazendo $y = 0$, na equação geral do circulo $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, ella torna-se $x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0$, de modo a poder representar, de uma infinidade de modos, qualquer equação do segundo grau, fazendo $\alpha = -\frac{1}{2} p$, $r = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q + \beta^2}$, ficando β arbitrario, e podendo r tornar-se sempre real. Si se collocar o centr sobre o eixo horizontal connstrucção reproduz espontaneamente a formula algebrica ordinaria, para caso o da raizes reaes.

Consideremos agora as equações do terceiro e do quarto grau, que, segundo a observação inicial de Descartes, podem sob este aspecto ser simultaneamente apreciadas, como exigindo naturalmente os mesmos meios graphicos. Não se poderá mais construil-as pela combinação de uma recta e de um circulo, nem pela de dous circulos, que, segundo uma excepção especial fundada sobre a natureza algebrica das equações circulares, não tem no fundo mais extensão analytica, pois que a subtracção de duas equações d'este genero fornece uma do primeiro grau. O modo mais simples consistirá, pois, aqui na in-

tersecção de duas secções conicas uma das quaes poderá ser tomada arbitrariamente.

Seja a equação $x^3+px^2+qx=r$. Póde-se ahi empregar, por exemplo, a parabola $x^2=y$, e a hyperbole $xy+py+qx=r$, ou a hyperbole mais complicada $xy+px^2+qx=r$: sommando ou subtraindo entre si as duas equações primitivas, ou seus multiplos quaesquer, se poderá aliás substituir a essas curvas uma infinidade de outros pares de secções conicas. O mesmo aconteceria com a equação do quarto grau $x^4+px^3+qx^2+rx=s$, em que, fazendo a principio $x^2=y$, se teria em seguida $y^2+pxy+qy+rx=s$ ou $y^2+pxy+qx^2+rx=s$.

126.—A respeito das equações do terceiro e do quarto grau, importa agora appreciar especialmente o modo muito notavel segundo o qual Descartes contituio finalmeute a construcção effectiva d'ellas, mostrando que, ao menos depois de alguns alguns preparativos faceis, póde ella sempre resultar da combinação de uma parabola dada com um circulo convenientemente escolhido, de modo a depender do traçado o mais praticavel que semelhante caso póde evidentemente comportar. Esta explicação só é directamente relativa ás equações do quarto grau: mas será facil em seguida estendel-a constantemente as do terceiro, introduzindo artificialmente n'estas um novo factor arbitrario $x-a$, que se torna commumente igual a x, para mais simplicidade: a intersecção ficticia assim subentendida deverá ser cuidadosamente eliminada da figura definitiva.

Seja, pois, sómente para construir d'este modo a equação

$$x^4+px^3+qx^2+rx=s$$

Como a generalidade do modo proposto só deve ividentemente depender da disposição relativa das duas curvas, e não da situação de cada uma para com os eixos coordenados, se poderá sempre adoptar a fórma a mais simples da equação parabolica, comtanto que a equação circular fique plenamente geral. Todavia, cumpre observar que a parabola deve poder estender-se horizontalmente nos dous sentidos, afim de que todas as raizes reaes da equação proposta possam ser semelhantemente construidas, qualquer que seja o signal d'ellas. Será preciso, pois, empregar para a equação parabolica, a nota-

ção desusada $x^2 = my$. Sua combinação com o typo circular $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ fornece a equação final

$$x^4+(m^2-2\beta m)x^2-2m^2\alpha x+m^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)=0.$$

Ora, confrontando-a com a proposta, reconhece-se immediatamente que sua identificação não será possivel emquanto esta contiver o termo x^3, que falta á outra. Este modo graphico exige, pois, um certo preparativo algebrico, aliás pouco incommodo, que consiste em fazer antes de tudo desapparecer este termo pela mudança de x em $x-\frac{p}{4}$, que equivale geometricamente a deslocar a origem de $\frac{p}{4}$ para a esquerda. Assim, a construcção relativa á equação convenientemente preparada convirá tambem á equação primitiva, por meio de um igual deslocamento inverso da origem correspondente.

Suppondo agora já estas a equação proposta privada do seu segundo termo, a comparação precedente dá, para os elementos geometricos do circulo procurado, as formulas

$$\beta=\frac{1}{2}m-\frac{q}{2m},\ \alpha=-\frac{r}{2m^2},\ R=\frac{1}{2m^2}\sqrt{r^2+m^2(m^2-q^2)+4m^2\varepsilon}.$$

As coordenadas do centro serão sempre reaes e finitas, qualquer que seja m: o raio poderá sel-o tambem, ainda mesmo sendo s negativo sem que disto resulte, para este parametro, nenhuma outra restricção além da relativa a um certo limite inferior.

A uma parabola qualquer se poderá, pois, constantemente adaptar um circulo, de maneira a construir qualquer equação do quarto grau, convenientemente preparada. Quando esta equação resultar de uma equação primitiva do terceiro grau, convirá notar que, segundo o modo mais commum, o circulo passará sempre pela origem, que constitue então a intersecção ficticia, finalmente superflua, á vista da multiplicação prévia por x; se poderá, pois, neste caso, limitar a construcção á determinação do centro, sem que haja necessidade de calcular especialmente o raio, de maneira a tornar inutil a mais complicada dessas tres formulas. No emprego material de semelhante processo graphico, a faculdade de escolher á vontade o parametro da parabola adquiriria muita importancia real, per-

mittindo dispensar desde o começo a parte mais penosa de cada construcção particular por meio da uniforme introducção de uma só parabola, cuidadosamente executada d'antemão, e que, diversamente combinada com circulos convenientes, poderia igualmente convir a todas as equações successivas do terceiro ou quarto grau.

A intersecção das duas curvas terá logar habitualmente em um ou dous pares de pontos, ou será totalmente impossivel. Estes tres casos, semelhantemente normaes, serão separados por duas sortes de casos excepcionaes, relativos ao contacto, e comportando um só encontro ou tres. E' facil sentir a concordancia espontanea dessas diversas indicações geometricas com a noção algebrica sobre a conjugação necessaria das raizes imaginarias.

Appliquemos, por exemplo, este modo especial á equação da trisecção do angulo, $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0$, em que b designa o seno do angulo dado e x o de sua terça parte. Elevando-a ao quarto grau, pela introducção do factor x, a reducção preliminar ahi se acha espontaneamente estabelecida, e as coordenadas do centro do circulo são $\beta = \frac{7}{8}$, $\alpha = -\frac{b}{8}$, si se tomar o parametro da parabola igual á unidade, isto é, ao raio trigonometrico. Para com uma parabola traçada d'ante-mão, esta relação servirá, pelo contrario, para accommodar convenientemente este raio, e por consequencia a linha dado b, segundo o modo que na occasião propria expliquei para a determinação graphica deste parametro.

Seja ainda a equação muito simples $x^3 = 2\,a^3$ que se refere directamente ao problema da duplicação do cubo. O preparativo algebrico ahi é semelhantemente espontaneo e acha-se então $\beta = \frac{1}{2}\,m$, $\alpha = \frac{a^3}{m^2}$; de sorte que será muito facil construir o circulo, mesmo deixando m qualquer em relação a a.

Multiplicando taes exercicios, ao leitor deverá procurar, já comparar nelles judiciosamente este modo especial com os outros diversos systemas graphicos, já tambem fazer concor-

dar sufficientemente as indicações particulares da figura com as que fornece directamente a apreciação algebrica de cada caso. Sob este ultimo aspecto, seria facil, por exemplo, verificar para com as duas equações precedentes, que a construcção confirma nellas a existencia necessaria de tres raizes reaes na primeira, e de duas raizes imaginarias na segunda, quaesquer que sejam os dados respectivos.

FIM DO VOLUME I